

Alcune osservazioni sulla coomologia di DX e QX

Lorenzo Guerra

Lo spazio dei lacci di uno spazio topologico X dotato di un punto base x_0 è lo spazio ΩX delle mappe $[0, 1] \rightarrow X$ il cui valore agli estremi è x_0 . Uno spazio di lacci di ordine k è il risultato di k applicazioni consecutive del funtore Ω ; uno di ordine infinito è uno spazio che, per ogni k , è omotopicamente equivalente a un certo $\Omega^k X$. Questi oggetti si sono rivelati estremamente importanti negli sviluppi della matematica a partire circa dalla metà del secolo scorso. Per esempio, essi hanno la funzione di “mattoni fondamentali” nella teoria dell’omotopia stabile, una delle teorie della topologia algebrica concettualmente più profonde, che, approssimativamente, studia quei fenomeni topologici che avvengono in dimensione alta indipendentemente dalla dimensione in un certo senso ben preciso. Un altro motivo di interesse per questi spazi è il loro ruolo chiave nello studio degli invarianti di gruppi notevoli, come i gruppi simmetrici (Barrat, Priddy, Quillen), il mapping class group di superfici (Galatius), e i gruppi di automorfismi dei gruppi liberi (Galatius, Vogtmann). Un’altra costruzione interessante in topologia algebrica è data dalle potenze estese $D_k X$ di uno spazio topologico, definite come

$$D_k X = E(\mathcal{S}_n)^+ \wedge_{\mathcal{S}_n} X^{\wedge k}.$$

Intuitivamente, $D_k X$ è la potenza k -esima di X , sulla quale l’azione del gruppo simmetrico è “resa libera”. Tali spazi hanno assunto un ruolo centrale nello sviluppo moderno della teoria dell’omotopia. Per esempio, sono stati utilizzati per definire le operazioni di Steenrod, per calcolare i differenziali nella successione spettrale di Adams, o per dimostrare il teorema di Nishida sugli elementi nilpotenti dell’anello di omotopia stabile, nonché nella costruzione di operazioni per la K-teoria e per il cobordismo. L’obiettivo di questo seminario è descrivere una presentazione relativamente semplice degli anelli di coomologia (a coefficienti in un campo) di $D_k X$ e di QX , dove Q è un opportuno funtore libero definito nella categoria degli spazi topologici a valori in quella degli spazi di lacci di ordine infinito, frutto di una collaborazione in corso del relatore con P. Salvatore e D. Sinha. Nella prima parte dell’intervento verrà fornita un’introduzione il più possibile autosufficiente all’omologia degli spazi di lacci di ordine infinito e alle operazioni che la governano. Nella seconda parte verranno enunciati e discussi i risultati sopra indicati.