

La dimensione di Hausdorff del bordo dell'insieme di Mandelbrot

Giovanni Mascellani

L'insieme (o frattale) di Mandelbrot è stato introdotto negli anni '70 da Benoît Mandelbrot ([Man]): compare nello studio dei comportamenti caotici dei sistemi dinamici associati all'iterazione delle mappe polinomiali del tipo $z \mapsto z^2 + \lambda$. Nonostante sia descritto dall'iterazione di mappe estremamente semplici, l'insieme di Mandelbrot presenta proprietà del tutto rimarchevoli, di interesse sia matematico che estetico. Un risultato particolarmente notevole, che bene esprime il grado di complessità del frattale, è la dimensione di Hausdorff del suo bordo, pari a 2. Il risultato originale è di Mitsuhiro Shishikura ([Shi]).

Durante il seminario saranno introdotte le costruzioni degli insiemi di Julia, dell'insieme di Mandelbrot e le loro proprietà generali. Poi presenteremo un risultato utile per stimare la dimensione di Hausdorff degli insiemi limite che si presentano nello studio di alcuni sistemi dinamici. Applicheremo tali risultati agli insiemi di Julia, studiando con maggiore dettaglio il comportamento delle orbite nei pressi di un punto parabolico, raffinando le conclusioni del teorema del fiore di Leau-Fatou, e poi trasporteremo gli stessi risultati sull'insieme di Mandelbrot. Infine, discuteremo brevemente alcuni dei problemi lasciati aperti da questo risultato.

Per un'introduzione generale alla dinamica olomorfa in una variabile, si veda [Mil]. Per un'introduzione alla teoria della misura di Hausdorff, si veda [Rog].

Riferimenti bibliografici

- [Man] Benoît B. Mandelbrot. Fractal aspects of the iteration of $z \mapsto \lambda z(1 - z)$ for complex λ and z . *Annals NY. Acad. Sci.* **357**(1980), 249–259.
- [Mil] John Milnor. *Dynamics in one complex variable*, volume 160 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third edition, 2006.
- [Rog] C. A. Rogers. *Hausdorff measures*. Cambridge University Press, London, 1970.
- [Shi] Mitsuhiro Shishikura. The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Ann. of Math. (2)* **147**(1998), 225–267.