QUATTRO LEZIONI SU UNA VERSIONE COOMOLOGICA DEL TEOREMA DI HODGE NON ABELIANO

MARK ANDREA DE CATALDO

Sia X una superficie di Riemann compatta, ossia una curva algebrica complessa liscia e proiettiva.

La corrispondenza di Hodge non abeliana mette in relazione lo spazio delle rappresentazioni di dimensione n del gruppo fondamentale di X, lo spazio delle coppie (E, D) con E fibrato vettoriale olomorfo di rango n su X e D una connessione olomorfa e piatta su E, ed i fibrati di Higgs, ovvero le coppie (E, ϕ) con E fibrato vettoriale olomorfo di rango n e $\phi : E \to E \otimes T^*X$ morfismo di fibrati olomorfi. Se si mettono opportune condizioni di stabilità o irriducibilità si possono munire questi spazi di strutture di varietà algebriche. La corrispondenza di Hodge non abeliana afferma che queste tre varietà sono diffeomorfe. Tuttavia queste non sono varietà isomorfe fra loro come varietà algebriche.

La congettura P=W afferma che una filtrazione della comologia, che è naturale quando consideriamo lo spazio dei fibrati di Higgs, corrisponde alla filtrazione dei pesi della teoria di Hodge mista quando consideriamo lo spazio delle rappresentazioni del gruppo fondamentale.

Il minicorso di de Cataldo introdurrà lo spazio dei fibrati di Higgs (e a questo collegata la fibrazione di Hitchin), lo spazio delle connessioni, e la congettura P=W, prima nel caso complesso e poi su campi qualsiasi, spiegando come debbano essere adattati alcuni concetti e che tipo di risultati si possano ottenere in tale caso.

Una scaletta indicativa del contenuto delle quattro lezioni è la seguente:

1) Spazi di moduli di fibrati di Higgs su curve e morfismo di Hitchin. 2) Spazio dei moduli di connessioni piatte su curve e p-morfismo di Hitchin in caratteristica positiva. 3) Versione coomologica del teorema di Hodge non abeliano in caratteristica positiva. 4) Una conseguenza della congettura P=W sui numeri complessi dimostrata usando i campi finiti.

Le referenze per le lezioni 1 e 2 sono molte, forse troppe; invece le idee principali saranno sviluppate a partire da poche nozioni di base, con alcune (poche) dimostrazioni. Verranno definiti: i fibrati di Higgs; la corrispondenze con i fasci sul fibrato cotangente della curva; le curve spettrali associate; il morfismo di Hitchin; la p-curvatura di una connessione piatta in caratteristica positiva e la versione per t-conessioni. I risultati necessari circa le proprietà di base degli spazi di moduli di queste strutture verranno introdotti e discussi, quasi tutti senza dimostrazioni.

I risultati nelle lezioni 3 e 4 sono contenuti in [NAHTp, Thm. 2.1] e [HModp Thm. 0.2]: le tecniche principali verranno discusse partendo dalle nozioni di base e nella maniera piu‘ elementare possibile: t-connessioni; cicli evanescenti e prossimi; cambiamento di base per morfismi propri.

Referenze bibliografiche per gli enunciati di cui sopra.

[NAHTp] =https://arxiv.org/pdf/2104.12970.pdf

[HModp] = https://arxiv.org/pdf/2105.03043.pdf

Referenze bibliografiche di base verranno proposte strada facendo. L'enfasi sarà più sui concetti e sulle idee, piuttosto che sui dettagli tecnici.

Date: May 2022.