

Programma di **Teoria della misura**

Docente: GIORGIO LETTA (letta@dm.unipi.it)

Anno accademico: 2011–2012

Semestre I

Numero di crediti: 6

Codice: 219AA

## Contenuti dell'insegnamento

**1. Tribù, spazi misurabili, applicazioni misurabili:** tribù generata da una classe d'insiemi, criterio fondamentale di misurabilità, tribù traccia, tribù prodotto, tribù di Borel e tribù di Baire, funzioni numeriche misurabili, criterio di misurabilità di Doob, funzioni semplici, tribù numerabilmente generate, complementi sul prodotto di tribù.

**2. Costruzione esplicita dello stabilizzato di un insieme rispetto a un insieme di operazioni e sua applicazione al caso delle tribù.**

**3. Integrale rispetto a una misura astratta:** funzioni additive su un clan, funzioni numerabilmente additive, misure, integrale delle funzioni semplici positive, integrale delle funzioni misurabili positive, funzioni e insiemi trascurabili, funzioni integrabili e semintegrabili, lemma di Fatou, teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata.

**4. Classi monotone:** spazi di Riesz di funzioni reali, classi monotone di funzioni reali, i teoremi delle classi monotone, alcune applicazioni.

**5. Integrale di Daniell:** definizione di funzionale di Daniell, i prolungamenti inferiore e superiore, teorema di prolungamento di Daniell, teorema di rappresentazione di Daniell, teorema di prolungamento di Carathéodory-Hahn, approssimazione di funzioni integrabili, teorema di rappresentazione di Riesz-Markov in uno spazio localmente compatto.

**6. Misure sulla retta reale:** costruzione della misura di Borel generata da una funzione crescente e continua a destra: metodo insiemistico e metodo funzionale basato sull'integrale di Cauchy-Stieltjes.

**7. Operazioni su misure:** misura definita da una densità, immagine di una misura, trasformazione di una misura mediante un nucleo, prodotto di due misure  $\sigma$ -finite, teoremi di Fubini e di Fubini-Tonelli, commutatività del prodotto di due misure  $\sigma$ -finite, prodotto di una famiglia finita di misure  $\sigma$ -finite, prodotto di una famiglia infinita di misure normalizzate.

**8. Convergenza secondo un filtro:** filtri e basi di filtro, le locuzioni “definitivamente” e “frequentemente”, limiti e valori di aderenza secondo un filtro, il caso di una funzione numerica, ultrafiltri, confronto con la teoria dei limiti secondo Moore-Smith, un problema riguardante il teorema di Alexandroff.

**9. Misure reali:** spazi vettoriali ordinati e spazi di Riesz, sottospazi di uno spazio di Riesz, spazi di Riesz completamente reticolati, decomposizione di Riesz, lo spazio di Riesz delle misure reali su un fissato spazio misurabile, misure reali definite da densità, misure estranee e decomposizione di Lebesgue, ulteriori proprietà dello spazio delle misure reali, applicazione agli atomi di una misura.

**10. Convergenza di misure reali:** il teorema di Nikodým sull'uniforme limitatezza di un insieme di misure reali, la nozione di uniforme esaustività, un lemma di Rosenthal, la proprietà di Cafiero, il teorema di Nikodým-Vitali-Hahn-Saks, (riguardante la convergenza puntuale di una successione di misure reali), applicazioni alle densità aritmetiche, il teorema di Dunford-Pettis, convergenza uniforme (o in variazione) di misure reali, teorema di Cafiero sul passaggio al limite sotto il segno d'integrale.

**11. Dualità degli spazi  $\mathcal{L}^p$ :** caratterizzazione di alcuni spazi duali, la topologia debole sullo spazio delle funzioni integrabili, confronto tra topologia debole e topologia forte.

## Testi di riferimento

Sono disponibili note redatte in plain TeX (che il docente invierà agli studenti, per posta elettronica, in formato PDF). I seguenti libri possono servire come testi di consultazione:

- [1] J. J. BENEDETTO, *Real Variable and Integration*. Teubner 1976.
- [2] P. BILLINGSLEY, *Probability and Measure*. Wiley 1995.
- [3] R. M. DUDLEY, *Real Analysis and Probability*. Cambridge University Press 2002.
- [4] R. L. WHEEDEN – A. ZYGMUND, *Measure and Integral*. Marcel Dekker 1977.

## Obiettivi formativi

Il corso si propone di fornire un'introduzione alla teoria della misura e dell'integrazione (sia in ambito astratto sia in ambito topologico) presentando il duplice aspetto del concetto di misura: quello di misura come funzione additiva d'insieme e quello di misura come forma lineare su un opportuno spazio funzionale.

## Nozioni presupposte

Nozioni elementari di calcolo differenziale e di analisi funzionale.

## Modalità d'esame

L'esame consiste in una prova orale. Il candidato è invitato a mettersi in contatto col docente per posta elettronica al fine di concordare **il giorno e l'ora** dello svolgimento della prova.