Teoria di capacità per spazi di Sobolev

Bozhidar Velichkov

Con questo seminario cercheremo di introdurre un concetto che, comparso in un modo naturale come problema di analisi, è stato un oggetto di ampia ricerca nel secolo scorso. Attualmente, questo concetto è rappresentato da una teoria completa con terminologia e risultati ben stabiliti. La teoria della capacità omogenea è fondamentale per la costruzione di alcuni spazi di misura, così come la teoria della misura è basilare per la costruzione degli spazi di Lebesgue L^p.

Il concetto astratto di capacità è stato introdotto dal matematico francese Gustave Choquet con l'articolo Theory of capacities. Noi ci occuperemo del caso particolare della capacità omogenea definita sugli insiemi dello spazio Euclideo $\mathbb{R}^n$ nel modo seguente:

$$\mathrm{cap}(B) = \inf\{\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} : u \in H^1(\mathbb{R}^n),\ B \subset \{u \geq 1\}^o\}.$$

In questo seminario dimostreremo che cap è una capacità secondo la definizione di Choquet. Inoltre, essa è strettamente legata agli spazi di Sobolev e ci permetterà di dare una nuova caratterizzazione degli spazi $H^1_0(\Omega)$ con Ω aperto. Infine, introdurremo una metrica sul insieme degli aperti di $\mathbb{R}^n$ e daremo una descrizione completa della sua chiusura secondo la metrica data.

References

[1] A. Henrot, M. Pierre: *Variation et Optimisation de Formes. Une Analyse Géométrique.* Mathématiques & Applications **48**, Springer-Verlag, Berlin (2005).

[2] L. Evans, R. Gariepy: *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Studies in Advanced mathematics, Crc Press, 1991.

[3] G. Choquet: *Theory of capacities.* Annales de l'institut Fourier, vol. 5, (1954), 131–295.

Scuola Normale Superiore di Pisa

Aprile 2011