Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

APPUNTI Lezione dell'18 Dicembre 2014.

SCHEMA: FUNZIONI CONVESSE IN PIU' VARIABILI

NOTA Per le dimostrazioni e definizioni qui omesse si rimanda a:
Volume 1, capitolo 4, paragrafo 12 pagine 287-293 del libro di Paolo Acquistapace
http://www.dm.unipi.it/ acquistp/analisi1.pdf.

INSIEMI CONVESSI

Definizione Sia C convesso in $\mathbf{R}^d$ si dicono:

- *supporto affine* A di C il più piccolo sottospazio affine (traslato di un sottospazio vettoriale) che contiene C.

- *dimensione* di C la dimensione del suo supporto affine.

-*interno relativo* $int_{rel}C$ di C: è la parte interna di C come sottoinsieme del suo supporto affine identificato con $\mathbf{R}^k$ ove k è la dimensione di C.

-*frontiera relativa* $\partial_{rel}C$ di C: è la frontiera di C come sottoinsieme del suo supporto affine identificato con $\mathbf{R}^k$ ove k è la dimensione di C.

-*chiusura relativa* $cl_{rel}C$ di C: la chiusura di C come sottoinsieme del suo supporto affine identificato con $\mathbf{R}^k$ ove k è la dimensione di C.

Teorema. Ogni convesso C di $\mathbf{R}^d$ che coincida con la sua *chiusura relativa* è intersezione dei *semispazi chiusi* di $\mathbf{R}^d$ che lo contengono:

$$C = \bigcap_{v\in\mathbf{R}^d, r\in\mathbf{R}: C\subseteq\{x\in\mathbf{R}^d: x\cdot v\leq r\}} \{x \in \mathbf{R}^d : \ x\cdot v \leq r\}$$

DIMOSTRAZIONE omessa.

FUNZIONI CONVESSE DI PIÙ VARIABILI

PROPOSIZIONE 0 Una funzione $y = f(x) = f(x_1, \dots x_d)$ su un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ convesso, è convessa su C se e solo se

- le sue restrizioni alle intersezioni di rette con C sono funzioni convesse;

- per ogni p , $q \in C$ le composizioni $g(t) = f(q+t(p-q))$ $t \in [0; 1]$ sono funzioni convesse.

DIMOSTRAZIONE. Direttamente dalla definizione di funzione convessa
$f(tp + (1-t)q) \leq tf(p) + (1-t)f(q)$, $t \in [0; 1]$, p, $q \in C$.

TEOREMA 1 Data funzione f su un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ convesso: se un punto $p_0 \in C$ è di minimo relativo allora è di minimo assoluto su C.

DIMOSTRAZIONE. 1) Riduzione al caso unidimensionale:se p_0 è di minimo relativo di f su C e non fosse di minimo assoluto su C vi sarebbe $p \in C$ per cui $f(p_0) < f(p)$.
2) Ora essendo p_0 di minimo locale per t piccolo si ha $f(p_0) \leq f(p_0 + t(p - p_0))$.
3) Ma per convessità deve essere

$$f(p_0 + t(p - P_0)) \leq tf(p) + (1-t)f(p_0) < tf(p) + (1-t)f(p_0) = f(p_0)$$

TEOREMA 2 Data funzione f su un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ convesso, e sia f *non costante*: se un punto $p_0 \in C$ è di massimo assoluto su C deve stare sulla frontiera relativa.

DIMOSTRAZIONE. 1) Riduzione al caso unidimensionale:se p_0 è di massimo assoluto di f su C e f non è costante deve esistere $p \in C$ per cui $f(p) < f(p_0)$.
Se per assurdo p_0 fosse nell'interno relativo di C vi sarebbe:
$q \in C$ allineato con p_0 e p con p_0 compreso tra q e p e $[q;p] \subseteq C$
(cioè $\exists \varepsilon : \forall t \in [-\varepsilon; 1] \quad p_0 + t(p - p_0) \in C, \qquad q =: p_0 - \varepsilon(p - p_0)$).
2) Essendo p_0 di massimo $f(q) \leq f(p_0)$.
3) Essendo p_0 tra q e p si ha $p_0 = p + \lambda(q - p)$ per qualche $\lambda \in (0; 1)$. Per convessità deve essere

$$f(p_0) = f(p + \lambda(q - p)) \leq \lambda f(q) + (1 - \lambda)f(p) < \lambda f(p_0) + (1 - \lambda)f(p_0) = f(p_0)$$

TEOREMA 3 Data funzione f su un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ convesso, allora f è continua sulla parte interna relativa di C.

Anzi è *localmente Lipscitziana* nella parte interna relativa: cioè: per ogni $r > 0$ e p interno relativo a C per cui $B(p, r) \cap C \subseteq int_{rel}C$ allora
vi è $L = L(p, r)$ per cui $|f(x) - f(z)| \leq L|x - z|_{\mathbf{R}^d}$, $\forall x, \ z \in B(p, r) \cap C$.

DIMOSTRAZIONE. Se C ha dimensione k ci si riduce a $d = k$. Se $d = 1$ si veda Osservazione 4.12.3 (2) pag. 288, per $d > 1$ esercizio 4.12.9.

TEOREMA 4 Data funzione f differenziabile su un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ aperto convesso: f è convessa su C se e solo se

$$\forall x \ , y \in C \qquad (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot_{\mathbf{R}^d} (x - y) \geq 0$$

Questa condizione per funzioni di una variabile equivale a dire che la derivata prima è una funzione crescente.

DIMOSTRAZIONE. Se f è convessa allora usando il teorema 5 si ha per ogni $x, \ z \in C$

$$f(x) - f(z) \ \geq \ \nabla f(z) \cdot_{\mathbf{R}^d} (x - z) \quad \text{e} \quad f(z) - f(x) \ + \ \nabla f(x) \cdot_{\mathbf{R}^d} (z - x)$$

sommando le due relazioni si ha la diseguaglianza voluta.

Vicevera se *per ogni* $x, \quad z \in C$ si ha $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot_{\mathbf{R}^d} (x - y) \geq 0$ si considera $g(t) = f(q + t(p - q))$ con $p, \quad q \in C, \ t \in [0; 1]$ per la regola della catena $g'(t) = t(p - q)\nabla f(q + t(p - q))$ e si ottiene che g' è crescente
$(g'(t) - g'(t))(t - s) = (t - s)^2(p - q) \cdot \nabla(f(q + t(p - q)) - \nabla f(q + s(p - q))) \geq 0$

Allora g deve esser convessa: se non fosse così vi sarebbero $s < t, \quad r \in [0; 1]$ e per cui $g(rt + (1 - r)s) > rg(t) + (1 - r)g(s)$ per cui

$$\frac{g(rt + (1 - r)s) - g(s)}{r(t - s)} \ > \ \frac{g(t) - g(s)}{t - s} \geq g'(s)$$

l'ultima diseguaglianza per il teorema di Lagrange. Ma passando al limite per $r \to 0^+$ si avrebbe $g'(s) > g'(s)$. Per la proposizione 0 si conclude.

Nota. Più in generale per una funzione convessa si dimostra che i *rapporti incrementali di dato centro sono funzioni crescenti in tutte le direzioni*: Esercizio 4.12.2 pag.292.

TEOREMA 5 Data funzione f differenziabile insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ aperto convesso: f è convessa su C se e solo se

$$\forall x \, , z \in C \qquad f(x) \geq f(z) \; + \; \nabla f(z) \cdot_{\mathbf{R}^d} (x - z)$$

Ovvero il grafico di f in ogni suo punto $(z, f(z))$ sta sopra al piano ad esso tangente in $(z, f(z))$.

DIMOSTRAZIONE. Teorema 4.12.4 pag.289.

TEOREMA 6 Data funzione f su $C \subseteq \mathbf{R}^d$ aperto convesso, ed f sia $C^2(C)$. Allora f è convessa se e solo se la sua matrice Hessiana
$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq d}$ è semidefinita non negativa per ogni $x \in C$.

DIMOSTRAZIONE. Teorema 4.12.5 pag.290-291.