Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

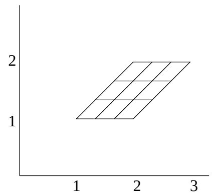
Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

TEST iniziale sugli argomenti dei corsi di matematica del primo anno
SECONDA PARTE **RIPOSTE UFFICIALI**: Esercizi 12-17, Geometria e Algebra lineare,
*Esercizi 18-22 elementi di calcolo differenziale in più variabili introdotti a Geometria.

ESERCIZIO n. 12 $\quad dim\ Ker = 2$.

ESERCIZIO n. 13 $\quad \sqrt{\mathbf{10}}$.

ESERCIZIO n. 14a) parallegramma con vertice in $(1,1)$ e spigoli adiacenti congruenti a $(1,1)$, $(1,0)$:



14b) Parallelepipedo tridimensionale nello spazio $\mathbf{R}^4$ con un vertice in $(1,1,1,1)$ e spigoli adiacenti congruenti ai vettori $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$.

ESERCIZIO n. 15 $\quad \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{30}}}$.

ESERCIZIO n. 16 $\quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3), \frac{1}{\sqrt{42}}(-5,4,1)\right)$.

ESERCIZIO n. 17 $\quad \mathbf{2} \cdot \sin \mathbf{x}$.

---

*ESERCIZIO n.18 $\quad 2 - 3x + 3x^2 - 3xy + O\left(((x-1)^2 + (y-2)^2)^{\frac{3}{2}}\right)$.

---

* ESERCIZIO n.19 $\quad -\frac{1}{2\log 2}$.

---

* ESERCIZIO n. 20 $\quad (\mathbf{0}, \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \mathbf{0})$.

---

* ESERCIZIO n.21 $\quad$ **SI:** $\sqrt{\mathbf{2}}$.

---

* ESERCIZIO n.22 $\quad \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{10}}$.

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

TEST iniziale sugli argomenti dei corsi di matematica del primo anno
SECONDA PARTE **SOLUZIONI**: Esercizi 12-17, Geometria e Algebra lineare,
*Esercizi 18-22 elementi di calcolo differenziale in più variabili introdotti a Geometria.

ESERCIZIO n. 12 Si calcoli la dimensione del nucleo dell'applicazione lineare che, relativamente alle basi canoniche di $\mathbf{R}^5$ ed $\mathbf{R}^3$, è associata alla matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

RISPOSTA: $dim\ Ker = 2$.
SOLUZIONE: per le formule del rango $dim\ Ker\ +\ dim\ Im\ =\ dim\ Dom$: nel caso $Dom = \mathbf{R}^5$, inoltre la dimensione dell'immagine è uguale al rango per colonne che è eguale a 3, per esempio poichè le prime tre colonne sono indipendenti individuando una matrice con determinate non nullo.

ESERCIZIO n. 13 Calcolar l'area del triangolo di vertici $(1,1,1),\ (1,-1,1),(2,3,4)$.

RISPOSTA: $\sqrt{10}$.
SOLUZIONE: traslando il triangolo l'area non cambia , si trasla per esempio con $(-1,-1,-1)$ ottenendo il triangolo di vertici $(0,0,0),\ (0,-2,0),(1,2,3)$. Tre impostazioni del calcolo:

- L'area del parallelogramma, con vertice in $(0,0,0)$ e lati congruenti ai vettori individuati da $(a,b,c),\ (x,y,z)$, è la norma del prodotto vettore $|(a,b,c)\times(x,y,z)| =$
$$= \sqrt{det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 + det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 + det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}^2}.$$

- Lo stesso calcolo si deduce dall'interpretazione geometrica come generalizzazione del teorema di Pitagora del teorema di Cauchy-Binet: *l'area di un parallelogramma è la radice quadrata della somma dei quadrati delle aree dei parallelogrammi ottenuti proiettando il parallelogramma in questione ortogonalmente sui tre piani coordinati*: queste aree sono i valori assoluti dei determinanti dei minori 2×2 della matrice S che ha come colonne le coordinate $(a,b,c),\ (x,y,z)$, tale somma di quadrati è il determinante della matrice prodotto tra ${}^tS$ es S (teorema di Cauchy-Binet):
$$det\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \\ c & z \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} b & y \\ c & z \end{pmatrix}^2 + det\begin{pmatrix} a & x \\ c & z \end{pmatrix}^2 + det\begin{pmatrix} a & x \\ b & y \end{pmatrix}^2.$$

- Più artigianalmente, considerando il significato geometrico del prodotto scalare, l'area del triangolo così individuato da $O=(0,0,0),\ P=(a,b,c),\ Q=(x,y,z)$, considerando (a,b,c) come base, è $\frac{1}{2}$ base $\cdot$ altezza $= \frac{1}{2}|P||Q||\sin POQ| = \frac{1}{2}|P||Q|\sqrt{1-\cos^2 POQ}$ cioè $\frac{1}{2}|P||Q|\sqrt{1-\left(\frac{\langle P\cdot Q\rangle}{|P||Q|}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{|P|^2|Q|^2 - |\langle P\cdot Q\rangle|^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4\cdot 14 - 16}$.

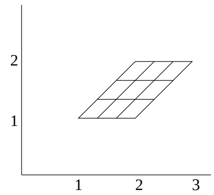
ESERCIZIO n. 14 a) Disegnare nel piano cartesiano il sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$ dato da

$$(1+s+t, 1+s)\ , \qquad (s,\ t)\ \in\ [0;1]\times[0;1]\ \ .$$

b) Che tipo di figura geometrica rappresenta il sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$ dato da

$$(1+r+s+t, 1+r, 1+s, 1+t)\ , \qquad (r,s,t)\ \in\ [0;1]\times[0;1]\times[0;1]\ \ ?$$

RISPOSTA: a) è un parallelogramma in $\mathbf{R}^2$ con un vertice in $(1,1)$ e lati congruenti ai vettori $(1,1,)$ e $(1,0)$. Ovvero il parallelogramma di vertici $(1,1)$, $(2,1)$, (2.2), $(3,2)$.



b) è un parallelepipedo tridimensionale nello spazio $\mathbf{R}^4$ con un vertice in $(1,1,1,1)$ e spigoli congreunti ai vettori $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$.

SOLUZIONE: a) $(1+s+t, 1+s) = (1,1)+(s+t,s) = (1,1)+(s,s)+(t,0) = (1,1)+s(1,1)+t(1,0)$. Fissato $s\in[0;1]$ in particolare $(1+s+t,1+s) = (1+s,1+s)+t(1,0)$ e al variare di $t\in[0;1]$ descrive il segmento orizzontale di estremi $(1+s,1+s)$ e $(2+s,1+s)$. Al variare poi di $s\in[0;1]$ si ha che $(1+s,1+s) = (s+1)(1,1)$ descrive il segmento parallelo alla bisettrice del primo quadrante ed estremi $(1,1)$, $(2,2)$.

b) Il ragionamento è del tutto analogo partendo da: $(1+r+s+t, 1+r, 1+s, 1+t) = (1,1,1,1)+r(1,1,0,0)+s(1,0,1,0)+t(1,0,0,1)$.

ESERCIZIO n. 15 Determinare il coseno dell'angolo tra la retta di equazione parametrica $r(t) = (t,2t,3t,4t),\ t\in\mathbf{R}$ e quella passante per l'origine e ortogonale all'iperpiano in $\mathbf{R}^4$ di equazione $x+y+z-w=4$.

RISPOSTA: $\dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

SOLUZIONE: l'iperpiano è definito da $x+y+z-w=4$ che è condizione di ortogonalità: $\langle(1,1,1,-1)\cdot(x-1,y-1,z-1,w+1)\rangle = 0$. Il sottospazio ad esso perpendicolare è dato da $R(t) = s(1,1,1,-1),\ t\in\mathbf{R}$. L'angolo α tra le due rette è l'angolo tra le "velocità":

$$\cos\alpha = \frac{\langle(1,1,1,-1)\cdot(1,2,3,4)\rangle}{|(1,1,1-1)||(1,2,3,4)|} = \frac{1+2+3-4}{\sqrt{4\cdot 30}} = \frac{1}{\sqrt{30}}.$$

ESERCIZIO n. 16 Si completi ed ortonormalizzi la coppia ordinata di vettori $((1,1,1);(1,2,-3))$ ad una base ortonormale di $\mathbf{R}^3$ con la stessa orientazione di quella canonica.

RISPOSTA: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \dfrac{1}{\sqrt{14}}(1,2,-3), \dfrac{1}{\sqrt{42}}(-5,4,1)\right)$.

SOLUZIONE: Per prima cosa si osserva che i due vettori sono ortogonali, e quindi linearmente indipendenti: il sottospazio ortogonale ad essi è unidimensionale. Quindi basta trovare un vettore ad essi ortogonale. O si calcola il prodotto vettoriale

$$(1,1,1)\times(1,2,-3) = \left(det\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -3\end{pmatrix},\ -\ det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}, det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\right) = (-5,4,1)$$

oppure si impongono le condizioni di ortogonalità con i due vettori

$$\begin{cases}\langle(x,y,z)\cdot(1,1,1)\rangle = 0\\ \langle(x,y,z)\cdot(1,2,-3)\rangle = 0\end{cases} = \begin{cases}x+y+z=0\\ x+2y-3z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix} = \tfrac{x}{5}\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

Poichè $det\begin{pmatrix}1 & 1 & -5\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & -3 & 1\end{pmatrix} > 0$ i vettori nell'ordine dato e normalizzati sono la base richiesta.

ESERCIZIO n. 17 Si consideri il prodotto scalare tra funzioni continue su $[-\pi;\pi]$ dato da:

$$\langle f|g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt.$$

Calcolare la proiezione ortogonale di $f(x) = x$ sul sottospazio generato dalle funzioni *ortonormali*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \qquad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}.$$

RISPOSTA: $2 \cdot \sin x$.
SOLUZIONE: poichè le tre funzioni date son ortonormali la proiezione ortogonale di f sul sottospazio da esse generato è

$$P(x) \;=\; \langle f|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \;+\; \langle f|\frac{\sin}{\sqrt{\pi}}\rangle \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \;+\; \langle f|\frac{\cos}{\sqrt{\pi}}\rangle \cdot \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi}}.$$

Poichè f è dispari, la prima e la terza funzione sono pari, il primo e il terzo prodotto scalare, essendo integrali tra π e $-\pi$ di funzioni dispari, sono nulli.

$$P(x) \;=\; \langle f|\frac{\sin}{\sqrt{\pi}}\rangle \cdot \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \;=\; \frac{\sin x}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin t\,dt \;=$$

$$\frac{2\sin x}{\pi}\int_0^{\pi} t\sin t\,dt = \frac{2\sin x}{\pi}\left(\left[-t\cos t\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos t\,dt\right) = \frac{2\sin x}{\pi}\left(\left[-t\cos t\right]_0^{\pi}\right) = 2\cdot\sin x$$

---

*ESERCIZIO n.18 Si calcoli lo sviluppo di Taylor del secondo ordine centrato in $(1,2)$ di:

$$f(x,y) \;=\; \cos[(x-1)(y-2)] + x^3 - 3xy.$$

RISPOSTA: $\qquad 2 - 3x + 3x^2 - 3xy + O\left(((x-1)^2 + (y-2)^2)^{\frac{3}{2}}\right).$
SOLUZIONE: per sfruttare gli sviluppi di Taylor notevoli, che son di centro 0, per funzioni di una variabile, conviene metter in evidenza le grandezze che per (x,y) vicino a $(1,2)$ sono vicino a $(0,0)$: cioè $(X,Y) =: (x-1, y-2)$. Quindi

$\cos[(x-1)(y-2)] + x^3 - 3xy = \cos[(x-1)(y-2)] + ((x-1)+1)^3 - 3((x-1)+1)((y-2)+2) =$
$\cos XY + (X+1)^3 - 3(X+1)(Y+2).$

Si tratta ora di trovare lo sviluppo in $(0,0)$ dell'espressione della funzione nelle variabili (X,Y) e infine ricalcolare il risultato nelle variabili (x,y) lasciando impliciti gli $o((x-1)^2+(y-2)^2)$.

Poichè $T =: XY \to 0$ quando $X \to 0,\ Y \to 0$ usando lo sviluppo di $\cos T$ in 0 si ottiene
$\cos[(x-1)(y-2)] + x^3 - 3xy = 1 - \frac{(XY)^2}{2} + O((XY)^4) + (X+1)^3 - 3(X+1)(Y+2) =$
(semplicemente sviluppando il cubo e facendo il prodotto)
$= 1 - \frac{(XY)^2}{2} + O((XY)^4) + X^3 + 1 + 3X^2 + 3X - 3XY - 6X - 3Y - 6.$
Poichè sviluppare al secondo ordine significa non esplicitare gli $o(|(X,Y)|^2)$, osservando che $(XY)^2 = O(|(X,Y)|^4)$, $X^3 = O(|(X,Y)|^3)$ si ha

$\cos[(x-1)(y-2)] + x^3 - 3xy = -4 - 3X - 3Y + 3X^2 - 3XY + O(|(X,Y)|^3 =$
$-4 - 3(x-1) - 3(y-2) + 3(x-1)^2 - 3(x-1)(y-2) + O\left(((x-1)^2 + (y-2)^2)^{\frac{3}{2}}\right) =$
$-4 - 3x + 3 - 3y + 6 + 3x^2 + 3 - 6x - 3xy + 6x + 3y - 6 + O\left(((x-1)^2 + (y-2)^2)^{\frac{3}{2}}\right) =$
$2 - 3x + 3x^2 - 3xy + O\left(((x-1)^2 + (y-2)^2)^{\frac{3}{2}}\right).$

* ESERCIZIO n.19 Grazie al terorema del Dini, per (x,y) "vicino" a $(1,2)$, il luogo di zeri

$$f(x,y) =: \; y \cdot 2^x \; + \; \sin\left(\pi\frac{x}{y}\right) - 5 = 0$$

definisce implicitamente x in funzione di y, $x = x(y)$, in modo che $f(x(y),y) = 0$. Calcolare

$$\frac{d\,x}{d\,y}(2)\ .$$

RISPOSTA: $-\dfrac{1}{2\log 2}$.

SOLUZIONE: innanzitutto si osserva che $f(1,2) = 0$, e che vicino ad $(1,2)$ la funzione ha derivate parziali continue ed in $(1,2)$ quella rispetto ad x non si annulla.

Il teorema del Dini garantisce che vi è un intervallo $[2-r; 2+r]$ centrato in 2 e un intervallo $[1-s; 1+s]$ centrato in 1 e una funzione con derivata continua $\varphi : [2-r; 2+r] \to [1-s; 1+s]$ per cui $\varphi(2) = 1$ e $f(x,y) = 0, (x,y) \in [1-s; 1+s] \times [2-r; 2+r]$ se e solo se $\varphi(y) = x$. In particolare $f(\varphi(y), y) = 0$ per $|y-2| \le r$.

Come uso si indica tale funzione con $x(y)$. Poichè $g(y) = f(x(y),y) = 0$, $y \in]2-r; 2+r[$ la derivata di g è identicamente nulla, per la regola della catena si ottiene

$\frac{df(x(y),y)}{dy} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\,x}{d\,y} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$

Calcolando le derivate parziali di f si ottiene

$(y \cdot \log 2 \cdot 2^x + \frac{\pi}{y}\cos\pi\frac{x}{y})\frac{d\,x}{d\,y}(y) + 2^x - \frac{\pi x}{y^2}\cos\pi\frac{x}{y} = 0$

calcolando per $y = 2$ tenendo presente che $x = x(y)$ e $x(2) = 1$ si ottiene

$(2\log 2 \cdot 2 + \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2})\frac{d\,x}{d\,y}(2) + 2 - \frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{2} = 0$

cioè $4\log 2\frac{d\,x}{d\,y}(2) + 2 = 0$.

---

* ESERCIZIO n. 20 Si calcolino le coordinate cartesiane del centro della circonferenza osculatrice di (t, t^2, t^3) in $(0,0,0)$.

RISPOSTA: $(0, \frac{1}{2}, 0)$.

SOLUZIONE: per prima cosa la curva $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ passa per il punto dato $P = (0,0,0)$ solo per $t = 0$.

Inoltre la curvatura in tale punto $k(P)$ è non nulla poichè $\gamma'(0) = (1,0,0) = T(P)$ e $\gamma''(0) = (0,2,0)$ sono ortogonali e $\gamma'' = \frac{d\,|\gamma'|}{d\,t}T + k|\gamma'|^2 N$. Anzi $k(P) = 2$ perciò il raggio di curvatura in P è $r(P) = \frac{1}{2}$. Il centro di curvatura è $\gamma + rN$.

---

* ESERCIZIO n.21 La curva piana data dalla relazione tra le coordinate polari

$$e^\theta \rho = 1, \quad \theta \ge 0, \quad \rho > 0 \quad \text{ha} \quad \text{lunghezza} \;\; \text{finita?}$$

RISPOSTA: SI

SOLUZIONE: poichè $\rho = e^{-\theta}$, in coordinate cartesiane la curva ha la parametrizzazione iniettiva: $\gamma(\theta) = e^{-\theta}(\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \ge 0$, $\gamma'(\theta) = -e^{-\theta}(\cos\theta, \sin\theta) + e^{-\theta}(-\sin\theta, \cos\theta)$ somma di due vettori ortogonali per Pitagora $|\gamma'(\theta)|^2 = e^{-2\theta}2$.

Questa parametrizzazione semplice e regolare con θ permette di calcolare la lunghezza con $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\gamma'(\theta)|\,d\theta = \int_0^{+\infty} \sqrt{e^{-2\theta}(1+1)}\,d\theta = \sqrt{2}.$

---

* ESERCIZIO n.22 Calcolare la misura della regione di piano compresa tra:
- il segmento $\{(x,y):\ y=x,\ \ 0\le x\le 2\ \}$,
- il sostegno della curva (t^2+t, t^4+t) per t che varia nell'intervallo $[0;1]$.

RISPOSTA: $\frac{3}{10}$.
SOLUZIONE: per prima cosa il segmento e il sostegno della curva hanno solo gli estremi $(0,0)$ e $(2,2)$ in comune e non si toccano in altri punti, e la curva sta sotto il segmento poichè per $t\in(0;1)$ si ha $t^2+t>t^4+t$.
Si potrebbe esprimere il sostegno della curva come grafico di una funzione $y=f(x)$ e quindi calcolare l'area come differenza tra l'integrale di $y=x$ e quello di $y=f(x)$ su $[0;1]$ (pongasi $x=t^2+t$ e si calcoli la giusta radice t in funzione di x).
È molto più semplice usare il teorema di Gauss-Green nel piano perchè la regione in questione ha come bordo, percorso in senso antiorario, la curva con la parametrizzazione data seguito dal segmento con la semplice parametrizzazione $(4-2t, 4-2t)=(2-t)(2,2),\ t\in[1;2]$. Quindi il bordo percorso in senso antiorario è dato dal cammino regolare a tratti:$\gamma(t)=$
$$\begin{cases}(t^2+t, t^4+t) & t\in[0;1]\\ (4-2t, 4-2t) & t\in[1;2]\end{cases}$$
$$Area=\int dxdy=\int_\gamma x\,dy=\int_0^1(t^2+t)(4t^3+1)\,dt\ +\ \int_1^2(4-2t)(-2)\,dt=$$
$$=\int_0^1(4t^5+4t^4+t^2+t)\,dt+\int_1^2(4t-8)\,dt=\frac{4}{6}+\frac{4}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+8-2-8=\frac{3}{10}.$$

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

TEST iniziale sugli argomenti dei corsi di matematica del primo anno
SECONDA PARTE **COMMENTI**: Esercizi 12-17, Geometria e Algebra lineare,
*Esercizi 18-22 elementi di calcolo differenziale in più variabili introdotti a Geometria.