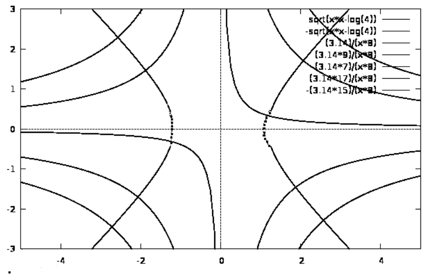
Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

TEST iniziale sugli argomenti dei corsi di matematica del primo anno
PRIMA PARTE **RISPOSTE UFFICIALI**: Esercizi 1-11, Analisi I.

ESERCIZIO n.1a) **SI** , 1c) **SI**.

ESERCIZIO n. 2a) $1 + 2i$, $1 - 2i$,
2b) $x^2 - y^2 = \frac{1}{2}\log 2$, $y = \frac{\pi}{8} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$:



ESERCIZIO n. 3 $\mathbf{S} = \infty$, $\mathbf{I} = \mathbf{0}$.

ESERCIZIO n. 4a) $\mathbf{1}$, 4b) $\nexists$, 4c) $\mathbf{0}$.

ESERCIZIO n. 5 *f) << e) << b) << c) << a) << d).*

ESERCIZIO n. 6 $\mathbf{M} = \mathbf{2}$, $\mu = -\mathbf{8}$.

ESERCIZIO n. 7 $\cos(e^x - e) = 1 - \dfrac{e^2}{2} + e^2 \cdot x - \dfrac{e^2}{2} \cdot x^2 + O((x-1)^3)$.

ESERCIZIO n. 8 $-\mathbf{1} < \mathbf{a} < \mathbf{1}$.

ESERCIZIO n. 9 $\mathbf{e} - \mathbf{1}$.

ESERCIZIO n. 10 $\mathbf{1}$.

ESERCIZIO n. 11 $ae^t + e^3 t(b + 6t) + \dfrac{1}{3}$.

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

TEST iniziale sugli argomenti dei corsi di matematica del primo anno
PRIMA PARTE **SOLUZIONI**: Esercizi 1-11, Analisi I.

ESERCIZIO n.1 Quali delle seguenti funzioni sono iniettive:

a) $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{R}$, $f(n) = 2 \cdot n^2 - n$,

b) $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = 2 \cdot x^2 - x$,

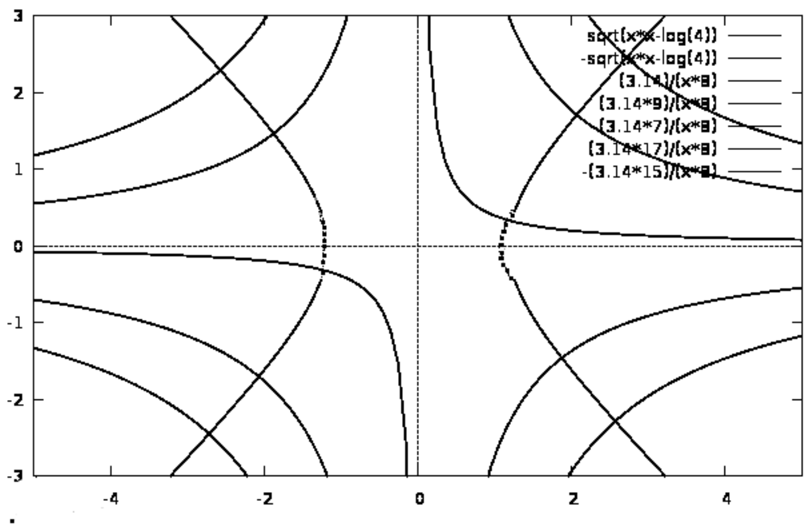
c) $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$, $h(x) = (2 \cdot x^2 - x\ ,\ x^2)$.

RISPOSTA: a) , c).
SOLUZIONE: a) f è iniettiva: se $n \neq m$ allora $n - m \neq 0$ e si ha:
$f(n) - f(m) = 2n^2 - n - 2m^2 + m = (n - m)(2(n + m) - 1) \neq 0$ poichè $2(n + m)$ è pari.
b) g non è iniettiva: $g(0) = 0 = g(\frac{1}{2})$.
c) h è iniettiva: se $x \neq y$ allora $d = x - y \neq 0$ allora:
$h(x) - h(y) = (2x^2 - x - 2y^2 + y, x^2 - y^2) = (x - y) \cdot (2(x + y) - 1, x + y) = d(2s - 1, s) \neq (0, 0)$.

ESERCIZIO n. 2 a) Risolvere $z^2 - 2z + 5 = 0,\ z \in \mathbf{C}$.

b) Individuare graficamente, nel piano cartesiano, i punti di coordinate $(x, y) \sim x + iy = z \in \mathbf{C}$ per cui $\exp(z^2) = 1 + i$.

RISPOSTA: a) $1 + 2i$, $1 - 2i$, b)



SOLUZIONE: a) si usa la formula per gli zeri di un trinomio di secondo grado $\dfrac{-(-2) + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2}$ (il metodo di quadratura si fa in campo complesso, con il simbolo di radice si intende l'insieme delle radici complesse).

b) $e^{(z^2)} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+2ixy} = e^{x^2-y^2}(\cos 2xy + i \sin 2xy)$ e $1 + i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$: se $e^{(z^2)} = 1 + i$ allora $e^{x^2-y^2} = \sqrt{2}$, $\cos 2xy + i \sin 2xy = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ cioè: $x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \log 2,\ 2xy = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$. Le soluzioni cercate sono i punti di intersezione dell'iperbole con asintoti $y = x,\ y = -x$ con ognuna delle iperboli $yx = \frac{\pi}{8} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

ESERCIZIO n. 3 Calcolare l'estremo superiore S, e l'inferiore I, dell'insieme
$\{x \in \mathbf{R}: \ \exists n \in \mathbf{N} : x = n^2 \cos n\pi + n^2\}$.

RISPOSTA: S$= \infty$, I$= 0$.
SOLUZIONE L'insieme è quello dei valori della successione $n^2(\cos n\pi + 1), n \in \mathbf{N}$: ora $\cos n\pi = (-1)^n$, quindi la successione vale $2n^2$ se n è pari, e vale 0 se n è dispari.

ESERCIZIO n. 4 Calcolare, se esistenti, i limiti:

$$\text{a)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \quad , \qquad \text{b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{e^x - 1}{x - 1}, \qquad \text{c)} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{2^x + x^7 + 9x}{(1 + \log(x^2 + 1))^x + x} \ .$$

RISPOSTA: a) 1, b) $\nexists$, c) 0.
SOLUZIONE: a) $-\frac{1}{n^2}$ è infinitesimo per $n \to \infty$ usando lo svilupo di Taylor in 0 di $\log(1+t)$ si ha $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = e^{n\log(1-\frac{1}{n^2})} = e^{n\left(-\frac{1}{n^2}+O(\frac{1}{n^4})\right)} = e^{-\frac{1}{n}+O(\frac{1}{n^3})}$, quindi usando lo sviluppo di Taylor in 0 di e^s si ha $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = 1 - \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.

b) per $x \to 1$ il numeratore converge a $e - 1 > 0$, e il denominatore converge a 0 ma per $x > 1$ è positivo e per $x < 1$ è negativo. Quindi $\lim_{x\to 1^-} \frac{e^x-1}{x-1} = -\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} \frac{e^x-1}{x-1} = +\infty$.

c) il denominatore è positivo per $x > 0$, ed è del tipo $2^x(1 + o(1))$: $\frac{x^7+9x}{2^x}$ è infinitesimo. Per $x > e$ il denominatore è maggiore di $3^x + x = 3^x(1 + o(1)) > 0$, quindi la frazione è tra 0 e $\frac{2^x(1+o(1))}{3^x(1+o(1))}$. Ma $\frac{2^x}{3^x} \to 0$: per il teorema "dei due carabinieri" il limite esiste ed è 0.

ESERCIZIO n. 5 Ordinare da sinistra a destra le seguenti funzioni in modo che ciascuna sia " o " dell'immediata successiva per $x \to 0^+$:

a) $2 + x$, b) $\frac{\sqrt{x}}{|\log x|}$, c) $\sqrt{x}|\log x|$, d) $|\log(1 + |\log x|)|$, e) $\sin x$, f) $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$.

RISPOSTA: $f) << e) << b) << c) << a) << d)$, $(A << B$ sta per $A = o(B))$.
SOLUZIONE: $|\log(1 + |\log x|)| \to +\infty$, $2 + x \to 2$, quindi: $2 + x << |\log(1 + |\log x|)|$.
Le altre grandezze sono infinitesime e quindi " o " di $2 + x$.
Poichè $e^{-\frac{1}{x}} = o(x^m)$ per ogni $m \in \mathbf{N}$ le rimanenti grandezze sono nei seguenti rapporti asintotici: $\dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} << x \sim \sin x = x + o(x) \sim x = \sqrt{x}\sqrt{x} << \dfrac{\sqrt{x}}{|\log x|} << \sqrt{x} << \sqrt{x}|\log x|$.

ESERCIZIO n. 6 Calcolare i *valori* di massimo assoluto, M, e minimo assoluto, μ, di

$$4x^3 - 3x + 1 \quad \text{per} \quad -\tfrac{3}{2} \leq x \leq \tfrac{2}{3}.$$

RISPOSTA: $M = 2$, $\mu = -8$.
SOLUZIONE: sia $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$, è una funzione continua e derivabile in ogni punto di $[-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}]$ che è chiuso e limitato . Quindi, per il teorema di Weierstrass, assume valori di massimo e minimo sul dominio specificato. I punti di massimo e minimo assoluto sono da cercar tra gli zeri della derivata nell'intervallo di definizione e tra gli estermi dell'intervallo stesso.
Si ha $f'(x) = 12x^2 - 3$ che ha zeri per $x = \frac{1}{2}, \ -\frac{1}{2} \in [-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}]$.
I valori della funzioni nei punti candidati: $f(-\frac{3}{2}) = -8$, $f(-\frac{1}{2}) = 2$, $f(\frac{1}{2}) = 0$, $f(\frac{2}{3}) = \frac{5}{27}$.
I valori di massimo e minimo assoluto necessariamente sono il minore e il maggiore tra questi.

ESERCIZIO n. 7 Si scriva lo sviluppo di Taylor centrato in 1 di ordine 2 di $\cos(e^x - e)$.

RISPOSTA: $\cos(e^x - e) = 1 - \dfrac{e^2}{2} + e^2 \cdot x - \dfrac{e^2}{2} \cdot x^2 + O((x-1)^3)$.

SOLUZIONE: $\cos(e^x - e) = \cos e(e^{x-1} - 1)$; poichè $t =: x - 1 \to 0$ usando lo sviluppo di e^t in 0: $e^{x-1} - 1 = (x-1) + O((x-1)^2)$. Poichè $y =: e^x - e \to 0$ usando lo sviluppo di $\cos y$ in 0 si ha:
$\cos(e^x - e) = \cos(e(x-1+O(x-1)^2)) = 1 - \frac{1}{2}[e(x-1+O(x-1)^2)]^2 + O([e(x-1+O(x-1)^2)]^4) = 1 - \frac{e^2}{2}[(x-1)^2 + O((x-1)^3)] + O((x-1)^4) = 1 - \frac{e^2}{2}(x-1)^2 + O((x-1)^3)$.

ESERCIZIO n. 8 Per quali valori del parametro a converge la serie $\sum \dfrac{a^n}{n^a}$?

RISPOSTA: $-1 < a < 1$

SOLUZIONE: Se $|a| > 1$ o $a = -1$ la successione degli addendi della serie non è infinitesima, e questa è condizione necessaria perchè la serie converga: quindi la serie non converge.
Se $a = 1$ si ha la serie armonica che non converge.
Per $|a| < 1$ la serie converge asolutamente poichè la successione dei valori assoluti degli addendi $\left|\frac{a^n}{n^a}\right|$ è minore di $|a|^n \cdot n^{|a|}$ che è la successione degli addendi di una serie convergente per il criterio del rapporto. Per il criterio del confronto si conclude.

ESERCIZIO n. 9 Si calcoli: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(\cos x)^2} \sin 2x dx,$

RISPOSTA: $e - 1$.

SOLUZIONE: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(\cos x)^2} \sin 2x dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(\cos x)^2} \cos x \sin x \, dx =$
$\displaystyle = -2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(\cos x)^2} \cos x \, (d \cos x) = -2 \int_1^0 e^{t^2} t \, dt = 2 \int_0^1 e^{t^2} t \, dt = \int_0^1 e^{t^2} \, (dt^2) = \int_0^1 e^s \, ds = e^s]_0^1.$

ESERCIZIO n. 10 Si calcoli il raggio di convergenza della serie di potenze $\sum z^{(n^2)} 2^n$.

RISPOSTA: 1

SOLUZIONE: pur essendo la serie $\sum z^{(n^2)} 2^n$ la serie di potenze $\sum a_m z^m$ con:

$$a_m = \begin{cases} 0 & \text{se } m \text{ non è un quadrato} \\ \\ 2^{\sqrt{m}} & \text{se } m \text{ è un quadrato} \end{cases}$$

conviene applicare il criterio del rapporto alla serie vista come serie numerica di addendi $b_n = z^{(n^2)} 2^n$ per $z \neq 0$ e quindi direttamente la definizione di raggio di convergenza: $\dfrac{\left|z^{((n+1)^2)}\right| 2^{n+1}}{\left|z^{(n^2)}\right| 2^n} = 2|z||z|^{2n}$ esso ha limite 0 minore di 1 se $|z| < 1$, mentre se $|z| = 1$ ha limite 2 e se $|z| > 1$ ha limite ∞.

ESERCIZIO n. 11 Si trovi la soluzione generale di $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 12e^{3t} + 1$.

RISPOSTA: $ae^t + e^3 t(b + 6t) + \frac{1}{3}$.

SOLUZIONE: è un'equazione lineare: le soluzioni sono tutte e sole quelle del tipo $x_o(t) + f(t)$ ove $f(t)$ è una soluzione particolare che si riesca a calcolare e $x_o(t)$ varia tra le soluzioni dell'equazione omogenea associata con termine noto nullo.

-essendo a coefficienti costanti si possono calcolare le soluzioni dell'omogenea associata: il polinomio caratteristico è $\lambda^2 - 4\lambda + 3$ ha radice reali distinte 3 ed 1; quindi le soluzioni dell'equazione omogenea sono tutte e sole quelle del tipo $ae^t + be^{3t}, \quad a, \ b \in \mathbf{R}$.

-soluzione particolare:

- il termine noto è somma di due funzioni: per linearità una soluzione particolare sarà somma di soluzioni particolari delle due equazioni differenziali aventi come termini noti ognuna uno dei due addendi del termine noto dato:

$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = 12e^{3t}$, $z''(t) - 4z'(t) + 3z(t) = 1$.

Nella prima equazione il termine noto $12e^{3t} = g(t)$ è del tipo polinomio per soluzione dell'omogenea, anzi è soluzione dell'omogenea. Una soluzione particolare sarà del tipo $y(t) = c \cdot t \cdot g(t)$: imponendo che sia soluzione si ottiene la relazione

$c[tg'' + 2g' - 4g(t) - 4tg'(t) + 3tg(t)] = g(t)$, per ogni t.

Usando il fatto che $g(t)$ è soluzione dell'omogenea questa relazione si riduce a $c[2g' - 4g(t)] = g(t)$, e quindi sapendo che $g(t) = 12e^{3t}$ ci si riduce a $c24e^{3t} = 12e^{3t}$ per ogni t: quindi $c = \frac{1}{2}$. Per cui la soluzione particolare è $6te^{3t}$.

Nella seconda equazione il termine noto non è del tipo polinomio per soluzione dell'omogenea poichè è una costante e 0 non è radice del polinomio caratteristico. Una soluzione particolare semplice da trovare sarà quindi anch'essa una funzione costante $z(t) = d$: imponendo che sia soluzione si ottiene $3d = 1$

- Concludendo $x(t) = x_o(t) + y(t) + z(t) = ae^t + be^{3t} + 6te^{3t} + \frac{1}{3}$.

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale
Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

TEST iniziale sugli argomenti dei corsi di matematica del primo anno
PRIMA PARTE **COMMENTI**: Esercizi 1-11, Analisi I.

OSSERVAZIONI DI CARATTERE GENERALE:

Su c.a.120 studenti "srettamente" presenti (l'aula era da 90 posti ...) hanno consegnato 106.

Contando come mezza risposta anche le risposte ad almeno metà dei quesiti per esercizio, e trascurando quelli che possono esser considerati errori di copiatura, il risultato è il seguente:

NETTAMENTE INSUFFICIENTI: c.a. 50%, cioè meno di 3 risposte giuste.
INSUFFICIENTI: c.a. 15%, almeno 3 risposte giuste ma non 4.
APPENA SUFFICIENTI e QUASI SUFFICIENTI: c.a. 30%, almeno 4 giuste meno di 6.
SUFFICIENTI : c.a. 5%, almeno 6 rispote giuste.

Nessuno ha dato più di 6 risposte giuste sugli 11 quesiti.

La partecipazione e l'impegno visti lasciano sperare dei progressi.

DATI E COMMENTI SUGLI ESERCIZI:

Nel seguito le percentuali di "ok" si riferiscono invece a risposte complete, tranne che per l'esercizio 2.

Es. 1: 15% ok, 16% vuoto: la funzione c) e' stata la meno capita.

Es. 2a: 90% ok, 2% vuoto.

Es. 2b: nessuno ok, 99% vuoto: nessuna sorpresa si pensava fosse per voi difficile.

Es.3: 33% ok, 30% vuoto: la maggior parte di quelli che hanno sbagliato hanno fatto due tipi di errori: l'estremo inferiore $-\infty$, e l'estremo superiore n^2 ... ma n è una variabile!

Es. 4: 10% ok, 5% vuoto: un terzo di quelli che non hanno fatto tutto giusto ha sbagliato il secondo limite dicendo che vale $+\infty$ mentre non esiste. Era il punto difficile. Curiosamente tre o quattro hanno dato la risposta giusta solo a questo punto.

Es. 5: nessuno ok, 75% vuoto: solo sei o sette persone hanno fatto solo un errore nell'ordinare le funzioni.

Es. 6: nessuno ok, 79% vuoto: questo ci ha sorpresi, nessuno ha fatto giusto questo esercizio. Due sono stati gli errori: il più grave non considerare gli estremi ma controllare la funzione solo nei punti dove si annulla la derivata. Quindi invece dei *valori* metter i punti di massimo o minimo (o presunti tali). Poi errori di calcolo.

Es. 7: 5% ok, 50% vuoto: molti lo hanno fatto a metà sviluppando solo il coseno e mettendoci dentro ancora l'esponenziale. Poi la questione che se il centro dello sviluppo non è 0: se il centro fosse $x_0 \neq 0$, nel caso nostro $x_0 = 1$, bisognava scrivere la funzione in funzione di $t = x - x_0$, svilupparla in 0, e infine a t sostituire $x - x_0$.

Es. 8: 22% ok, 19% vuoto: dei rimanenti almeno un terzo ha messo "mezza" risposta: $a < 1$.

Es. 9: 65% ok, 15% vuoto.

Es. 10: nessuno ok, 65% vuoto: nessuno giusto. Riguardare le serie di potenze!

Es. 11: 27% giusto, 30% vuoto: quasi la metà dei rimanenti ha trovato solo le soluzioni dell'omogenea.