Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

APPUNTI Lezione dell'18 Dicembre 2014.

SCHEMA: FUNZIONI CONVESSE IN PIU' VARIABILI

NOTA Per le dimostrazioni e definizioni qui omesse si rimanda a:
Volume 1, capitolo 4, paragrafo 12 pagine 287-293 del libro di Paolo Acquistapace
http://www.dm.unipi.it/ acquistp/analisi1.pdf.

INSIEMI CONVESSI

Definizione Sia C convesso in $\mathbf{R}^d$ si dicono:

- *supporto affine* A di C il più piccolo sottospazio affine (traslato di un sottospazio vettoriale) che contiene C.

- *dimensione* di C la dimensione del suo supporto affine.

-*interno relativo* $int_{rel}C$ di C: è la parte interna di C come sottoinsieme del suo supporto affine identificato con $\mathbf{R}^k$ ove k è la dimensione di C.

-*frontiera relativa* $\partial_{rel}C$ di C: è la frontiera di C come sottoinsieme del suo supporto affine identificato con $\mathbf{R}^k$ ove k è la dimensione di C.

-*chiusura relativa* $cl_{rel}C$ di C: la chiusura di C come sottoinsieme del suo supporto affine identificato con $\mathbf{R}^k$ ove k è la dimensione di C.

Teorema. Ogni convesso C di $\mathbf{R}^d$ che coincida con la sua *chiusura relativa* è intersezione dei *semispazi chiusi* di $\mathbf{R}^d$ che lo contengono:

$$C \;=\; \bigcap_{v\in\mathbf{R}^d, r\in\mathbf{R}: C\subseteq\{x\in\mathbf{R}^d: x\cdot v\leq r\}} \{x \in \mathbf{R}^d :\; x\cdot v \leq r\}$$

DIMOSTRAZIONE omessa.

FUNZIONI CONVESSE DI PIÙ VARIABILI

PROPOSIZIONE 0 Una funzione $y = f(x) = f(x_1, \ldots x_d)$ su un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ convesso, è convessa su C se e solo se

- le sue restrizioni alle intersezioni di rette con C sono funzioni convesse;

- per ogni $p\,, q \in C$ le composizioni $g(t) = f(q + t(p - q))$ $t \in [0; 1]$ sono funzioni convesse.

DIMOSTRAZIONE. Direttamente dalla definizione di funzione convessa
$f(tp + (1 - t)q) \leq tf(p) + (1 - t)f(q)$, $t \in [0; 1]$, p, $q \in C$.

TEOREMA 1 Data funzione f su un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ convesso: se un punto $p_0 \in C$ è di minimo relativo allora è di minimo assoluto su C.

DIMOSTRAZIONE. 1) Riduzione al caso unidimensionale:se p_0 è di minimo relativo di f su C e non fosse di minimo assoluto su C vi sarebbe $p \in C$ per cui $f(p_0) > f(p)$.
2) Ora essendo p_0 di minimo locale per t piccolo si ha $f(p_0) \leq f(p_0 + t(p - p_0))$.
3) Ma per convessità deve essere

$$f(p_0 + t(p - p_0)) \leq tf(p) + (1 - t)f(p_0) < tf(p_0) + (1 - t)f(p_0) = f(p_0)$$

TEOREMA 2 Data funzione f su un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ convesso, e sia f *non costante*: se un punto $p_0 \in C$ è di massimo assoluto su C deve stare sulla frontiera relativa.

DIMOSTRAZIONE. 1) Riduzione al caso unidimensionale:se p_0 è di massimo assoluto di f su C e f non è costante deve esistere $p \in C$ per cui $f(p) < f(p_0)$.
Se per assurdo p_0 fosse nell'interno relativo di C vi sarebbe:
$q \in C$ allineato con p_0 e p con p_0 compreso tra q e p e $[q;p] \subseteq C$
(cioè $\exists \varepsilon : \forall t \in [-\varepsilon; 1]\ \ p_0 + t(p - p_0) \in C, \quad q =: p_0 - \varepsilon(p - p_0)$).
2) Essendo p_0 di massimo $f(q) \leq f(p_0)$.
3) Essendo p_0 tra q e p si ha $p_0 = p + \lambda(q - p)$ per qualche $\lambda \in (0; 1)$. Per convessità deve essere

$$f(p_0) = f(p + \lambda(q - p)) \leq \lambda f(q) + (1 - \lambda)f(p) < \lambda f(p_0) + (1 - \lambda)f(p_0) = f(p_0)$$

TEOREMA 3 Data funzione f su un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ convesso, allora f è continua sulla parte interna relativa di C.

Anzi è *localmente Lipscitziana* nella parte interna relativa: cioè: per ogni $r > 0$ e p interno relativo a C per cui $B(p, r) \cap C \subseteq int_{rel}C$ allora
vi è $L = L(p, r)$ per cui $|f(x) - f(z)| \leq L|x - z|_{\mathbf{R}^d}, \forall x,\ z \in B(p, r) \cap C$.

DIMOSTRAZIONE. Se C ha dimensione k ci si riduce a $d = k$. Se $d = 1$ si veda Osservazione 4.12.3 (2) pag. 288, per $d > 1$ esercizio 4.12.9.

TEOREMA 4 Data funzione f differenziabile su un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ aperto convesso: f è convessa su C se e solo se

$$\forall x\ , y \in C \quad (\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot_{\mathbf{R}^d} (x - y) \geq 0$$

Questa condizione per funzioni di una variabile equivale a dire che la derivata prima è una funzione crescente.

DIMOSTRAZIONE. Se f è convessa allora usando il teorema 5 si ha per ogni $x,\ z \in C$

$$f(x) - f(z) \ \geq\ \nabla f(z) \cdot_{\mathbf{R}^d} (x - z) \quad \text{e} \quad f(z) - f(x)\ +\ \nabla f(x) \cdot_{\mathbf{R}^d} (z - x)$$

sommando le due relazioni si ha la diseguaglianza voluta.

Vicevera se *per ogni* $x,\ \ z \in C$ si ha $(\nabla f(x) - \nabla f(y)) \cdot_{\mathbf{R}^d} (x - y) \geq 0$ si considera $g(t) = f(q+t(p-q))$ con $p,\ \ q \in C,\ t \in [0; 1]$ per la regola della catena $g'(t) = (p-q)\nabla f(q+t(p - q))$ e si ottiene che g' è crescente
$(g'(t) - g'(s))(t - s) = (t - s)(p - q) \cdot (\nabla f(q + t(p - q)) - \nabla f(q + s(p - q))) \geq 0$

Allora g deve esser convessa: per comodità si assuma g non costante e $g(0) = 0$; se non vi fosse convessità vi sarebbe $r \in]0; 1[$ per cui $rg(1) + (1 - r)g(0) < g(r)$ che letta sui rapporti incremenatli è

$$v_0 =: \frac{g(1) - g(0)}{1 - 0} = g(1) < \frac{g(r) - g(0)}{r} =: v_1.$$

Necessariamente se $v_2 =: \dfrac{g(1) - g(r)}{1 - r}$ dovendo essere la quota $g(1) = 1 \cdot v_0 = rv_0 + (1-r)v_0 = v_1 r + v_2(1 - r)$ si ha $(v_2 - v_0)(v_1 - v_0) \leq 0$, cioè $v_2 \leq v_0 < v_1$. Per Lagrange vi sono $0 < a < r$ e $r < b < 1$ per cui $v_2 = g'(b)$ e $v_1 = g'(a)$ pertanto l'ultima diseguaglianze diventa

$$g'(b) = v_2 = \frac{g(1) - g(r)}{1 - r} < \frac{g(r) - g(0)}{r} = v_1 = g'(a)\ , \quad a < b.$$

Nota. Più in generale si dimostra che una funzione è convessa se e solo se *ogni rapporto incrementale, di centro qualsiasi, lungo una qualsiasi retta per tale centro, è una funzione crescente lungo la retta*: Esercizio 4.12.2 pag.292.

TEOREMA 5 Data funzione f differenziabile insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ aperto convesso: f è convessa su C se e solo se

$$\forall x\ , z \in C \qquad f(x) \geq f(z) \ + \ \nabla f(z) \cdot_{\mathbf{R}^d} (x - z)$$

Ovvero il grafico di f in ogni suo punto $(z, f(z))$ sta sopra al piano ad esso tangente in $(z, f(z))$.

DIMOSTRAZIONE. Teorema 4.12.4 pag.289.

TEOREMA 6 Data funzione f su $C \subseteq \mathbf{R}^d$ aperto convesso, ed f sia $C^2(C)$. Allora f è convessa se e solo se la sua matrice Hessiana

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i,j \leq d}$ è semidefinita non negativa per ogni $x \in C$.

DIMOSTRAZIONE. Teorema 4.12.5 pag.290-291.