Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

APPUNTI Lezione del 20 Novembre 2014.

ORIENTABILITA'

Definzione 1: Un aperto A di $\mathbf{R}^m$ si dice C^k regolare se la sua frontiera ∂A è una $m-1$-varietà C^k regolare in R^m (ovvero localmente luogo di zeri di una funzione a valori relai con diffrenziale di ramgo massimo, ovvero localmente grafico di una funzione reale di $m-1$ variabili).
- si può provare che nel caso dato un $u \in \partial A$ vi è un intorno U di x per cui $A \cap U$ è la parte in U di sottografico della funzione di cui $\partial U \cap A$ è grafico. In vece se $\partial U \cap A$ si vede come luogo di zeri, $\{q \in U : f(q) = 0\}$ con f verificante le ipotesi del teorema del Dini, si ha $A \cap U = \{q \in U : f(q) < 0\}$.

Definzione 2: *Mappe di transizione, cambiamenti di carta.*
Sia Σ una d-varietà in $\mathbf{R}^m$ di classe C^k (eventualmente con bordo).
Dato $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_m) \in \Sigma$ siano $A^1 \subseteq \mathbf{R}^d_u$, $A^2 \subseteq \mathbf{R}^d_s$ carte aperte connesse con parametrizzazioni locali di intorni in Σ di $\tilde{x}$
$\Psi^1 : A^1 \to \Sigma \quad \Psi^1(u) = \Psi^1(u_1 \ldots u_d) = (x_1(u_1 \ldots u_d) \ldots, x_m(u_1 \ldots u_d)) = x(u), \quad \Psi^1(\tilde{u}) = \tilde{x}$
$\Psi^2 : A^2 \to \Sigma \quad \Psi^2(s) = \Psi^1(s_1, \ldots s_d) = (x_1(s_1, \ldots s_d) \ldots, x_m(s_1, \ldots s_d)) = x(s), \quad \Psi^2(\tilde{s}) = \tilde{x}$
che sono per definizione iniettive, con differenziali di rango massimo d e inverse (funzioni coordinate) $(\Psi^1)^{-1}(x) =: U(x) = (U_1(x), \ldots U_d(x)))$, $(\Psi^2)^{-1}(x) =: S(x)$ continue. La funzione

$$P(s) = (P_1(s_1 \ldots s_d), \ldots P_d(s_1 \ldots s_d)) = (u_1(s), \ldots u_d(s)) = u(s) = (\Psi^1)^{-1}\left(\Psi^2(s)\right) = U(x(s))$$
$$P : S\left(\Psi^1(A^1) \cap \Psi^2(A^2)\right) \to U\left(\Psi^1(A^1) \cap \Psi^2(A^2)\right)$$

si dice *mappa di transizione* o cambiamento di carta, cambiamento di parametrizzazione locale, ovvero cambaimento di coordinate locali.

Osservazione 1: - Nella pratica si ha spesso direttamente l'espressione analitica delle coordinate u in funzione delle coordinate s: $u = u(s) = P(s)$ e non sempre serve calcolare le inverse delle parametrizzazioni.
- Tale P è in effetti un cambiamento di coordinate curvilinee in $\mathbf{R}^d$. Essa e' invertibile ovviamente, piú delicato è convincersi che è almeno C^1. Nel caso la regola della catena garantisce che dP è un'applicazione lineare invertibile e che l'inversa di P è anch'essa C^1.

Osservazione 2: - Sia $\frac{\partial \Psi^1}{\partial u_1}(u), \ldots \frac{\partial \Psi^1}{\partial u_d}(u)$, $u \in U\left(\left(\Psi^1(A^1) \cap \Psi^2(A^2)\right)\right)$, sia $\frac{\partial \Psi^2}{\partial s_1}(s), \ldots \frac{\partial \Psi^2}{\partial s_d}(s)$, $s \in S\left(\left(\Psi^1(A^1) \cap \Psi^2(A^2)\right)\right)$, sono basi (della giacitura) dello spazio tangente a Σ nei punti in $\left(\Psi^1(A^1) \cap \Psi^2(A^2)\right)$. Per la regola della catena si ha $d\Psi^2 = dPd\Psi^1$, quindi la matrice del cambiamento lineare di coordinate dalla base data da $\frac{\partial \Psi^1}{\partial u_1}(u), \ldots \frac{\partial \Psi^1}{\partial u_d}(u)$ a quella data da $\frac{\partial \Psi^2}{\partial s_1}(s), \ldots \frac{\partial \Psi^2}{\partial s_d}(s)$ è la matrcie Jacobiana $d \times d$ di dP: $\left(\frac{\partial P_i}{\partial s_j}\right)$
- Se Σ è una 2-varietà in $\mathbf{R}^3$ e $(x, y, z) \in \Sigma$ è sia $(x, y, z) = \Psi^1(u, v)$ si a $(x, y, z) = \Psi^2(s, t)$ allora per via delle assunzioni fatte sia $\frac{\partial \Psi^1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Psi^1}{\partial v}(u, v)$ sia $\frac{\partial \Psi^2}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \Psi^2}{\partial t}(s, t)$ sono vettori ortogonali non nulli (le parametrzzazione son odi rango due) a Σ in (x, y, z). Quindi son uno multiplo dell'altro.È immediata la verifica per le proprietà del prodotto vettoriale che $\frac{\partial \Psi^2}{\partial s}(s, t) \times \frac{\partial \Psi^2}{\partial t}(s, t) = det\, dP \cdot \frac{\partial \Psi^1}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Psi^1}{\partial v}(u, v)$.

- Quindi ogni parametrizzazione locale individua una direzione normale e si porta dietro l'area di un parallelogramma (la norma del prodotto vettore) e un verso nella direzione normale. Può darsi (se il determinante Jacobiano della funzione di transizione è negativo) che questo verso cambi da parametrizzazione locale a parametrizzazione locale dello stesso pezzetto di Σ.

Quindi se una 2-varietà in $\mathbf{R}^3$ ha un atlante di carte locali con mappe di transizione da carta a carta a determinante Jacobiano positivo i prodotti vettori delle derivate parziali delle parametrizzazioni individuano tutti lo stesso verso nella diresione ortogonale al piano tangente alla 2-varietà. Ne segue la definizoine principale:

Definzione 3: *Orientabilità.*
Una d-varietà Σ in $\mathbf{R}^m$ di classe C^k (eventualmente con bordo) si dice *orientabile* se esiste un atlante (insieme di parametrizzazioni locali con carte locali connesse, eventualmente chiusure di aperti regolari, l'unione delle cui immagini ricopre Σ) $\{(\Psi^1, A^1), \dots (\Psi^h, A^h) \dots\}$ per cui i detreminanti delle mappe di transizione da una carta all'altra son tutti positivi: $det\, \frac{\partial \Psi^i}{\partial \Psi_j} > 0$.

Teorema 1. Una $m-1$-varietà C^1 ,Σ, in R^m è orientabile se e solo se esiste una funzione $N = (N_1, \dots N_m) : \Sigma \to =: \{(x_1, \dots x_m) : x_1^2 + \dots x_m^2 = 1\} = S^{m-1}$ c he sia *continua* . Ovvero un 'campo 'continuo di vettori unitari normali.

Definzione 4: *Orientazione.* Si dice orientazione di una $m-1$-varietà C^1 orientabile Σ in $\mathbf{R}^m$ un campo di vettori unitari continuo e normale a Σ.

Osservazione 3: - Se Σ è connessa (per archi) allora ha solo 2 orientazioni : N e $-N$.

- Se Σ è costituita da n pezzi disgiunti e connessi avrà 2^n orientazioni.

- Non si ha il linguaggio utile per definire in generale cosa sia un'orientazione di una d-varietà in $\mathbf{R}^m$ con $d < m-1$.

Osservazione 4: - Se $\sigma(s,t) : T \to \mathbf{R}^3$ è una 2-superficie regolare C^1 parametrca (globale ma possibilmente, come quella della sfera in coordinate angolari, " infedele") con T tra un aperto A, anche regolare, e la sua chiusura, essendo per definizione $d\sigma$ di rango massimo si avrà che $n(s,t) = \frac{\partial \sigma}{\partial s}(s,t) \times \frac{\partial \sigma}{\partial t}(s,t)$ è sempre ben definito non nullo su tutto T. Sarà normale e continuo in (s,t) ... ma pol'essere che Σ l'immagine di σ, anche fosse una 2-variatà con bordo, *non* sia comunque orientabile. Infatti non è detto che $n(\sigma^{-1}((x,y,z))$ con $(x,y,z) \in \Sigma$ sia continua (o meglio prolungabile con continuità da A a $\bar{A}$)!

- L'esempio principe è il nastro di Möbius (confronta libro di P.Acquistapace vol. 2 pagg. 458-459-460 esempi 4.9.5-6)

Teorema 2.(non elementare) Una 2-varietà senza bordo in $\mathbf{R}^3$ è sempre orientabile.

Teorema 3. (non immediato) La frontiera di un aperto regolare in $\mathbf{R}^m$ è sempre orientabile.

Teorema 4. (non immediato) Se $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^{m-d}$ è C^1 e $d_x f$ ha rango massimo su $\Sigma = \{x : f(x) = 0\}$ allora Σ è una d-varietà orientabile.

Criterio 1. In particolare il luogo di zeri $\Sigma = \{x : f(x) = 0\}$ di una funzione $f : \Omega \subseteq \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ C^1 con $\nabla f(x) \neq 0$ su Σ è una $m-1$ varietà orientabile; questo è immediato basta porre $N(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|}$.

Criterio 2. Una 2-varietà in $\mathbf{R}^3$ con un atlante con due sole carte per cui l'intersezione delle loro immagini è connessa è orientabile.È immediato il segno del determinante Jacobiano della mappa di transizione è una funzione che assume solo i valori 1 o -1 (il determinante Jacobiano non si può annullare per definizione di parametrizzazione locale con differnziale di rango massimo) ed è definita sull'intresezione connessa delle immagine delle parametrizzazioni. Ma è una funzione continua. Quindi è costante. Stesso contenuto con linguaggio diverso: sull'immagine di una parametrizzazione locale scelgo come vettore normale il prodotto vettore delle derivate parziali della parametrizzazione. Il prodotto vettore delle derivate parziali dell'altra parametrizzazione locale ha prodotto scalare (di $\mathbf{R}^3$) con esso che non si annulla mai. Quindi tale segno è una funzione continua della posizione su tale pezzo di varietà. Quindi il prodotto scalare sull'intersezione delle immagini ha segno costante essendo essa connessa. Se è positivo i versori delle normali indotte mi danno un'orientazione. Se negativo cambio una parametrizzazione, chiamiamola $\Psi(u,v)$, considerando $\Gamma(v,u) = \Psi(u,v)$: cioè cambio tra i due vettori delle derivate parziali chi tra i due è il primo e chi il secondo e quindi il prodotto vetore cambia segno.

Ricordiamo la definizione di d-varietà Σ in $\mathbf{R}^m$ con bordo $b\Sigma$ (che risulta sempre esser una $d-1$-varietà in $\mathbf{R}^m$):

Notazione : $B^o_- = \{(u_1, \dots u_d) : u_d < 0,\ u_1^2 + \dots + u_d^2 < 1\}$, $\Gamma = \{(u_1, \dots u_{d-1}, 0) : u_1^2 + \dots + u_{d-1}^2 < 1\}$, $B_- = B^o_- \cup \Gamma$.

Definizione 5: Σ si dice d-varietetà con bordo in R^m di classe C^k se per ogni $x \in \Sigma$ si ha una di queste due possibilità:

a- esiste un intorno V di x in $\mathbf{R}^m$ ed esiste una aperto A di R^d (carta locale) e una funzione $\Psi : A \to V \cap \Sigma$ bigettiva continua con inversa continua, C^k con differenziale di rango massimo (parametrizzazione locale). Nel caso si scrive $x \in i\Sigma$.

b- esiste un intorno V di x in $\mathbf{R}^m$ e $\Psi : B_- \to V \cap \Sigma$ bigettiva continua con inversa continua, C^k forte con differenziale di rango massimo (parametrizzazione locale di bordo) $x = \Psi(u)$, $u \in \Gamma$. Nel caso si scrive $x \in b\Sigma$. L'insieme di tali punti $b\Sigma$ è detto *bordo* di Σ.

Osservazione 5: - per una carta locale di bordo si ha $\Psi(\Gamma) = b\Sigma \cap V$ per definizione.
- $b\Sigma$ è una $d-1$-varietà in $\mathbf{R}^m$.
- il vettore H tangente a Σ in $\tilde{x}$ dato da $\frac{\partial \Psi}{\partial u_d}(\tilde{u})$ intuitivamente punta all'esterno di Σ.

-Una definizione equivalente (grazie al teorema del rango) è la seguente: Σ si dice d-varietà con bordo se per ogni punto x o vale a- oppure vale

c- esistono: V intorno di x in $\mathbf{R}^m$, A aperto di $\mathbf{R}^d$ e $T \subseteq \partial A$ $d-1$-varietà senza bordo in R^d, $\Psi : A \cup T \to \Sigma \cap V$ bigettiva in modo che $\Psi(A) = i\Sigma \cap V$, $x = \Psi(u)$ con $u \in T$, Ψ sia continua con la sua inversa, C^k con differenziale di rango massimo.

Definzione 6: *Vettori tangenti esterni al bordo.*
Sia Σ una d-varietà con bordo $b\Sigma$ in $\mathbf{R}^m$, $x \in b\Sigma$.
Un vettore H tangente a Σ in x si dice *esterno* se, detta $H^\perp$ la sua componente ortogonale al piano tangente a $b\Sigma$, si ha:
$H^\perp \neq 0$, e per ogni curva regolare $\gamma : [0; a[\to \Sigma$ tale che $\gamma(0) = x$ $\langle \gamma'(0) \cdot H^\perp \rangle_m \leq 0$

- un vettore J tangente a Σ in $x \in b\Sigma$ si dirà *normale esterno* se è normale al tangente a $b\Sigma$ e se $\gamma(0) = x$ si ha $\langle \gamma'(0) \cdot J \rangle_m \leq 0$.

Osservazione 6: - con le notazioni della definizione 5b si ha per una Ψ parametrizzazione locale di bordo che $H = \frac{\partial \Psi}{\partial u_d}(\tilde{u})$ è un vettore tangente a Σ in $\tilde{x} = \Psi(\tilde{u}) \in b\Sigma$ esterno (vedi nota 2).

consideriamo ora la definizione 5c: per definizione di $d-1$-varietà per ogni punto $u \in T$ vi è un intorno U di u in $\mathbf{R}^d$ e una funzione $f : U \to \mathbf{R}$ per cui $T \cap U = \{q : f(q) = 0\}$ e $A \cap U = \{q : f(q) < 0\}$, con f C^1 e gradiente non nullo. Quindi un vettore ν di $\mathbf{R}^d$ si dirà esterno ad A in $u \in T \subset \partial A$ se $\langle K \cdot \nabla f(u) \rangle_d > 0$;
- quindi se $\tilde{x} = \Psi(\tilde{u}) \in b\Sigma$, $\tilde{u} \in T \subseteq \partial A$, e ν è esterno ad A in $\tilde{u}$ si avrà che $d_{\tilde{u}}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}(\tilde{u})$ sarà tangente a Σ esterno al bordo in $\tilde{x} = \Psi(\tilde{u}) \in b\Sigma$.

Definzione 7: *Orientazione indotta sul bordo.*
Sia Σ una 2-varietà con bordo $b\Sigma = \Lambda$ in $\mathbf{R}^3$ con orientazione N.
Si dice orientazione indotta da N su $b\Sigma$ una funzione tale che:

- $T : b\Sigma \to S^2$ continua,

- $T(x, y, z)$ è tangente alla 1-varietà $b\Sigma$ in $(x, y, z) \in b\Sigma$
(quindi a maggior ragione tangente in $(x, y, z) \in b\Sigma$ a Σ),

- $det(H, T(x, y, z), N(x, y, z)) > 0$ per ogni H vettore tangente esterno a Σ in $(x, y, z) \in b\Sigma$.

Osservazione 7: - Essendo il bordo una 1-varietà regolare almeno nel caso in cui sia limitato sarà ... un'unione disgiunta di sostengi di curve regolari semplici definite su intervalli chiusi. L'orientazione T indotta dall'orientazione N della 2-varietà di cui questi sostengi di cammini son bordo, corrisponde ai vettori tangenti dati dalle loro parametrizzazioni per lunghezza d'arco in modo che essi siano percorsi lasciando Σ alla loro sinistra, camminando con i piedi nel punto di applicazione di N e la testa nel verso della sua punta.
- Nel caso in cui la 2-varietà con bordo sia $\Sigma = \bar{A}$ con A sottoinsieme aperto regolare di $\mathbf{R}^2$ il suo bordo coincide con la sua frontiera. Se l'orientazione N è quella che "esce dal foglio" l'orientazione indotta sul bordo fa percorrere i cammini in senso antiorario se la componente connessa della frontiera "circonda " A, in senso orario se A "circonda" la componente della frontiera.
- Quindi nella pratica se $\Psi(u, v) = (\Psi_1(u, v), \Psi_2(u, v), \Psi_3(u, v))$ è una parametrizzaizone con bordo definita su $\{(u, v) : v \leq 0,\ u^2 + v^2 < 1\}$ e l'orientazione di Σ che si è scelta, $N(x, y, z)$, concide in un punto $(x, y, z) = \Psi(u, v) b\Sigma$ proprio con $\frac{\partial \Psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}(u, v)$ allora come $T(x, y, z)$ si può scegliere proprio il versore dato da $-\frac{\partial \Psi}{\partial u}(u, v)$. Viceversa si scagli il versore $\frac{\partial \Psi}{\partial u}(u, v)$ se $\frac{\partial \Psi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Psi}{\partial v}(u, v) = -N(\Psi(u, v))$.

Nota 1 (piuttosto articolata, solo per appassionati curiosi) Per veder che P è C^1 si usa prima il teorema del rango: si considera la base canonica di $\mathbf{R}^m$ $e_1 \dots e_m$, si vede l'intorno di $\tilde{x}$ in Σ come grafico in $\mathbf{R}^m$ di una $g : B \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{m-d}$. Conviene identificare $\mathbf{R}^d$ con l'opportuno sottospazio di $\mathbf{R}^m$ dato da $x_{\tau_1} e_{\tau_1} + \dots x_{\tau_d} e_{\tau_d}$ (con le coordinate $x_{\sigma_1} = \dots x_{\sigma_{m-d}} = 0$): si pone $x_\tau = \sum x_{\tau_i} e_{\tau_i}$, $x_\sigma = \sum x_{\sigma_j} e_{\sigma_j}$ e quindi $\tilde{g}(x_\tau) = g_\sigma(x_{\tau_1}, \dots x_{\tau_d}) = x_\sigma(x_\tau)$ e i punti dell'intorno di $\tilde{x}$ in Σ saranno del tipo $x_\tau + g_\sigma(x_\tau)$. Anzi saranno quelli del tipo $\Psi_\tau(u) + g_\sigma(\Psi_\tau(u))$ ovvero $\Psi_\sigma(u) = g_\sigma(\Psi_\tau(u))$.
Se si trasla tale grafico di poco, "su e giú" se $m - d = 1$, nelle direzioni $e_{\sigma_1} \dots e_{\sigma_{m-d}}$ non si intersecano altri punti di Σ: ovvero vi è ε tale che se $|v_\sigma| < \varepsilon$ allora $x_\tau + g_\sigma(x_\tau) + v_\sigma$ non sta in Σ. Chiamiamo l'insieme aperto dei punti cosi costruiti Σ_ε: esso appunto interseca Σ solo nei punti del grafico.
Quindi per la regola della catena: si ha che la funzione $\Gamma(u, v) = \Psi(u) + v_\sigma$ $(|v_\sigma| < \varepsilon)$ è bigettiva su Σ_ε da un aperto di $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}^d_u \times \mathbf{R}^{m-d}$: è invertbile con differenziale invertibile, per cui la sua inversa è C^1: ma l'inversa di Ψ è una restrizione di tale inversa.

Nota 2 Per definizione i primi $d-1-$ vettori delle derivate parziali della parametrizzazione locale di un punto del bordo $\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(\tilde{u}), \dots \frac{\partial \Psi}{\partial u_{d-1}}(\tilde{u})$ formano una base del tangente a $b\Sigma$ in

$\Psi(\tilde{u}) = \tilde{x}$: la componente $H^\perp$ normale di $H = \frac{\partial \Psi}{\partial u_d}(\tilde{u})$ rispetto a tale tangente è non nulla poichè $d_{\tilde{u}}\Psi$ è di rango massimo. Indichiamo quindi con H^T la componente di H sul tangente al bordo $b\Sigma$ in $\tilde{x} = \Psi(\tilde{u})$.
Se poi γ è una curva regolare da $[0; a[$ in Σ e $\gamma(0) = \tilde{x} \in b\Sigma$, essendo $\psi(t) =: \Psi^{-1}(\gamma(t))$ una curva a valori in B_- con $\tilde{u} = \psi(0) \in \Gamma$, cioè $\psi(0)_d = 0$, si ha in particolare $\psi_d'(0) \leq 0$:
infatti per $t > 0$ sviluppando con Taylor: $0 \geq \psi_d(t) = \psi_d(0) + \psi_d'(0)t + o(t) = \psi_d'(0)t + o(t)$ dividendo per $t > 0$ e passando al limite $0 \geq \psi_d'(0)$.
Per la regola della catena $\gamma'(0) = \psi_1'(0)\frac{\partial \Psi}{\partial u_1}(\tilde{u}) + \ldots \psi_{d-1}'(0)\frac{\partial \Psi}{\partial u_{d-1}}(\tilde{u}) + \psi_d'(0)H^T + \psi_d'(0)H^\perp$ facendo il prodotto scalare con $H^\perp$ rimane solo $\langle \psi_d' H^\perp \cdot H^\perp \rangle_m = \psi_d' |H^\perp|^2 \leq 0$.