Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

Prova in itinere di autovalutazione, 15 Dicembre 2104

PRIMA PARTE SOLUZIONI

ESERCIZIO n.1 Si calcoli l'area **A** del triangolo di vertici $(1,1,2)$, $(2,-1,3)$, $(-1,3,2)$.

A$=\sqrt{3}$. Traslando, per esempio il primo vertice, l'area non cambia e ci si riduce al triangolo di vertici $(0,0,0)$, $(1,-2,1)$, $(-2,2,0)$: l'area di questo è metà di quella del parallelogramma quindi per la formula di Cauchy-Binet [**Lezioni** del 3,8, 9/10/2014]: $4\mathbf{A}^2 =$

$$|(1,-2,1)\times(-2,2,0)|^2 = det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} = 12$$

ESERCIZIO n. 2 Sia $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n}$, $n \in \mathbf{N}$, $x \geq 0$:

a) si calcoli $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) =: f(x)$ b) la convergenza è uniforme ?

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & se\ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{2} & se\ x = 1 \\ 1 & se\ x > 1 \end{cases}$, b) NO.

a) Ci si basa sullo studio della convergenza di $g_n(x) = x^n$ [**Esercitazione** del 23/10/2104]. Poichè per $|x| < 1$ si ha che $x^n \to 0$ per $n \to \infty$, inoltre poich'è $x \geq 0$ si ha $\dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$. Pertanto in $[0;1)$ la successione è infinitesima.
Per $x = 1$ si ha $f_n(x) = \dfrac{1}{2}$, quindi la successione è costante quindi convergente al tale valore.
Per $x < 1$ si ha $x^n \to +\infty$ per cui essendo $f_n(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x^n}+1}$ si ha $f_n(x) \to 1$, per $n \to \infty$.

b) Poichè [**Lezione** del 16/10/2014] limite uniforme di funzioni continue e' continuo la convergenza non può esser uniforme essendo f_n funzioni continue e f discontinua .
In altre parole $(C([0;+\infty)), \sup|\cdot|)$ è completo: cioè è chiuso tra le limitate.

ESERCIZIO n. 3 Si calcoli al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ la minima distanza **D** rispetto alla seminorma $L^2(-\pi;\pi)$ della funzione $f(x) = \cos x$ dalle funzioni $g_\alpha(x) = \alpha \cdot x$.

D$=\sqrt{\pi}$. La distanza rispetto alla norma $L^2(-\pi;\pi)$ è [**Lezione** del 15/1/0/2014]

$$d_{L^2}(f,g_\alpha)] = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)-g_\alpha(x)|^2\,dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [(\cos x)^2 + \alpha^2x^2 - 2\alpha x\cos x\,]\,dx} =$$

$$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x)^2\,dx + \alpha^2\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx - 2\alpha\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\ dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}(\cos x)^2\,dx + \alpha^2\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx}$$

$$= \sqrt{\ \pi\ \ +\ \ \alpha^2\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx}.$$ Minimo se e solo se $\alpha\ =\ 0$.

ESERCIZIO n. 4 Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha + |y|^{2\alpha}}$.

$\alpha \in (-\infty; 3)$.

Per prima cosa se $\alpha \le 0$ la funzione non è definita su $xy = 0$. Se $\alpha = 0$ altrove è eguale a x^2y^2 che è inifnitesimo. Se $\alpha < 0$, nel dominio $xy \neq 0$, il denominatore tende all'infinito . Poichè il numeratore è infinitesimo a maggior ragione lo è la frazione data. Quindi per gli α non positivi vi è convergenza.

Per $\alpha > 0$ si nota che per $x = 0$ la funzione è nulla: per $(x, y) = (0, y) \to 0$ converge a 0.

Pertanto se fissato $\alpha > 0$ se si trovano altre restrizioni con limiti diversi da 0 il limite non esiste (per tali $\alpha > 0$).

Conviene quindi usare le variabili x e $z = y^2$ la funzione diventa $\lim_{(x,z)\to(0,0^+)} \frac{x^2z}{|x|^\alpha + z^\alpha}$. Le coordinate polari (ρ, θ) rispetto a (x, z) chiariscono la situazione:

$$\lim_{(x,z)\to(0,0^+)} \frac{x^2z}{|x|^\alpha + z^\alpha} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^\alpha(|\cos\theta|^\alpha + |\sin\theta|^\alpha)}.$$

Per $\alpha \ge 3$ restringendosi a $x = z = y^2$ cioè $\theta = \frac{\pi}{4}$, per $\alpha = 3$ il limite non esiste e per $\alpha > 3$ è $+\infty$. Pertanto per $\alpha \ge 3$ il limite non esiste.
Quindi poichè $|\cos\theta|^\alpha + |\sin\theta|^\alpha$ ha valore minimo $M > 0$ strettamente positivo (non annullandosi contemporaneamente le due funzini trigonometriche ed essendo continue su $[0; 2\pi]$):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha + |y|^{2\alpha}} = \lim_{(x,z)\to(0,0^+)} \frac{x^2z}{|x|^\alpha + z^\alpha} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^\alpha(|\cos\theta|^\alpha + |\sin\theta|^\alpha)} \le \lim_{\rho\to0^+} \rho^{3-\alpha}\frac{1}{M}.$$

ESERCIZIO n. 5 Si scriva l'equazione del piano normale in $(1, 1, 2)$ al luogo di zeri definito dalle equazioni $xyz = 2$, $xy + yz + xz = 5$.

$x - y = 0.$

Per prima cosa $P =: (1, 1, 2)$ appartiene al luogo di zeri che indichiamo con V.

Il luogo di zeri V_1 definito da $f_1(x, y, z) =: xyz = 0$ ha un vettore normale non nullo in $(1, 1, 2)$ dato da [**Lezione** 31/10/2014] $\nabla f_1(1, 1, 2) = (yz, xz, xy)_{x=1,y=1,z=2} = (2, 2, 1)$ pertanto è 2-varietà vicino al punto $(1, 1, 2)$ [Teorema del Dini **Lezione** 6, 13/11/2014].

Il luogo di zeri V_2 definito da $f_2(x, y, z) =: xy + yz + xz = 0$ ha un vettore normale non nullo in $(1, 1, 2)$ dato da $\nabla f_2(1, 1, 2) = (y + z, x + z, x + y)_{x=1,y=1,z=2} = (3, 3, 2)$ pertanto è 2-varietà vicino al punto $(1, 1, 2)$.

Essendo $V = V_1 \cap V_2$ poichè ∇f_1 , ∇f_2 in $(1, 1, 2)$ sono indipendenti, V è 1-varietà con tangente in $(1, 1, 2)$ di direzione $\nabla f_1 \times \nabla f_2$.

I coefficienti di tale direzione tangente sono quelle dell'equazione cartesiana che definisce il piano normale in $(1, 1, 2)$ alla curva V:

$$(2, 2, 1) \times (3, 3, 2) = (1, -1, 0).$$

ESERCIZIO n. 6 Si calcoli il polinomio di Taylor del secondo ordine di centro $x = 1$ per la funzione $y = y(x)$ definita implicitamente intorno a $(1, 0)$ da $e^{x+y} + x^2 + y^2 - 2x = e - 1$.

$P_2,1(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2}(x-1)^2 \; = \; -(x-1) \; - \; \frac{2}{e}\,(x-1)^2.$

Per prima cosa $(1,0)$ sta nel luogo di zeri.

Per il Teorema del Dini [**Lezione** 6/11/2014] il gradiente della funzione del punto $(1,0)$ essendo con la prima componente non nulla $\nabla(e^{x+y}+x^2+y^2-2x) = (e^{x+y}+2x-2, e^{x+y}+2y) = (e,e)$ vicino a $(1,0)$ il luogo di zeri è un grafico di una funzione $y(x)$ regolare C^∞.

Pertanto derivando rispetto a x l'equazione si ottiene:

$(1+y')e^{x+y} + 2x + 2yy' - 2 = 0$

da questa equazione (differenziale) sostituendo $x = 1$, $y(1) = y = 0$ si ricava $y'(1) = -1$. Derivando ulteriormente

$y''e^{x+y} + (1+y')^2e^{x+y} + 2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$

da quest'altra equazione (differenziale) sostituendo $x = 1$, $y(1) = y = 0$ e il già ricavato $y'(1) = -1$ si ottiene $y''(1) = -\frac{4}{e}$.

ESERCIZIO n. 7 Si scriva lo sviluppo di Taylor di ordine 7 e centro $(0,0,0)$ di $f(x,y,z) = \cos xyz - z\sin xy$.

$$f(x,y,z) \; = \; 1 \; - \; xyz \; - \; \frac{x^2y^2z^2}{2} \; - \; \frac{x^3y^3z}{6} \; + \; O((x^2+y^2+z^2)^{\frac{11}{2}}).$$

Si tratta di usare gli sviluppi di Taylor in 0 di una variabile, valutare i resti rispetto a $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{2}}$ e quindi usare l'unicità degli sviluppi di Taylor [esercizi della **Lezione** 27/11/2014].

$$\cos(xyz) \; = \; 1 \; - \; \frac{x^2y^2z^2}{2} \; + O(x^4y^4z^4) \; = \; 1 \; - \; \frac{x^2y^2z^2}{2} \; + O((x^2+y^2+z^2)^{\frac{12}{2}}) \; =$$
$$= \; 1 \; - \; \frac{x^2y^2z^2}{2} \; + o((x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{2}})$$
$$z\sin(xy) \; = \; zxy \; - z\frac{x^3y^3}{6} \; + \; zO(x^5y^5) \; = \; zxy \; - \; \frac{zx^3y^3}{6} \; + \; O((x^2+y^2+z^2)^{\frac{11}{2}})$$

pertanto

$$\begin{aligned} \cos(xyz) - z\sin(xy) \; &= \; 1 \; - \; zxy \; - \; \tfrac{x^2y^2z^2}{2} \; + \; \tfrac{zx^3y^3}{6} \; + \; O((x^2+y^2+z^2)^{\frac{11}{2}}) \\ &= \; 1 \; - \; zxy \; - \; \tfrac{x^2y^2z^2}{2} \; + \; \tfrac{zx^3y^3}{6} \; + \; o((x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{2}}) \end{aligned}$$

ESERCIZIO n. 8 Si determinino i valori $\mathbf{V_M}$ di massimo, $\mathbf{V_m}$ di minimo, per $f(x,y,z) = x^2 - yz$ sulla palla unitaria definita da $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

$\mathbf{V_M} \; = \; 1$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{V_m} \; = \; -\frac{1}{2}$

La funzione f è continua sul limitato chiuso dato da $g(x,y,z) =: x^2+y^2+z^2 \le 1$ (preimmagine di un chiuso mediante funzione continua [**Lezione** 16/10/2014]). Per il teoremi di Weiestrass e di Bolzano-Weiestrass vi sono punti in tale dominio cha e massimizzano e minimizzano f su di esso.

Si procede con metodo indiretto ad esaminare i punti che soddisfan le condizioni necessarie. Non essendoci punti singolari interni per la funzione, ed essendo la frontiera del dominio $x^2+y^2+z^2=1$ 2-varietà regolare in cui anche la funzione è regolare, gli unici punti su cui valutare la funzione son quelli: $\begin{array}{ll} A) & \textit{o stazionari interni} \\ B) & \textit{o stazionari tangenziali al bordo.} \end{array}$

A) $\nabla f(x,y,z) = (2x,-z,-y)$ si annulla solo in $(0,0,0)$. Tale punto non è ne essere di valore massimo locale ne di valore minimo locale poichè $f(0,0,0)=0$, ma $f(0,y,y)=y^2<0$, $f(0,y,-y)=y^2>0$ per $y\neq 0$. Figuriamoci di massimo o minimo assoluti.

B)Stazionarietà tangenziale: cioè gradiente della funzione ortogonale al tangente al vincolo (non c'è componente tangenziale della crescita): moltiplicatori di Lagrange [**Lezione, Esercitazione** 11/12/2014]: $\nabla f = \lambda \nabla g$ sul vincolo:

$$(*)\begin{cases} 2x = \lambda 2x & (dx) \\ -z = \lambda 2y & (dy) \\ -y = \lambda 2z & (dz) \\ 1 = x^2+y^2+z^2 & (V) \end{cases}$$

i) Deve essere $\lambda \neq 0$ se no si annullano le tre variabili e non si sta sul vincolo.
ii) Si osserva dalle (dy) , (dz) che $z=0 \Leftrightarrow y=0$. Se $y=z=0$ da (V) si ha che $x=\pm 1$.

$$f(\pm 1,0,0) = 1$$

iii) Si esamina il caso $yz\neq 0$ e $x=0$. Da (dy) e (dz) moltplicando in croce le due equazioni e dividendo per 2λ si ha $y^2=z^2$. Inoltre da (V) $2y^2=1$ per cui $y=z=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{2}\ ,\ \ f(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}\ ,\ \ f(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{2}\ ,\ \ f(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=\frac{1}{2}$$

iv) Rimane il caso $xyz\neq 0$ che non è ammissibile: infatti dividendo per $2x$ la (dx) si ha $\lambda=1$ quindi usando (dy) e(dz) si otterrebbe $-z=2y=-2(-y)=-2(2z)=-4z$ cioè $z=0$.

Dovendoci esser punti di valore massimo e minimo, ed essendo sulla frontiera, i valori negli unici punti candidati sono 1, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Il massimo e il minimo tra questi sono $\mathbf{V}_M$, $\mathbf{V}_m$.
UN'ALTRA SOLUZIONE si basa sulla 2-omogeneità delle funzioni.
1) Sono richiesti *solo i valori critici tangenziali* $f(x,y,z)$ non i punti (x,y,z) soluzioni di (*).
2) I valori critici tangenziali di f su $\{g=k\}$ con f pos. p-omogenea e g pos. q-omogenea sono $\mathbf{V}_c = \frac{q}{p}\lambda\ k$ [**Lezioni** 6/11, 11, 17/12/2014]. Quindi conviene trovare *solo i* λ.
3) Ma la *parte differenziale* (dx), d(y), (dz) del sistema di Lagrange (*) è nel caso un sistema lineare omogeneo con parametro λ:

$$(*)\begin{pmatrix} 2-\lambda 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda 2 & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basta quindi trovare i λ che annullano il determinante $2(1-\lambda)(4\lambda^2-1)$: $\lambda=1$, $\lambda\pm\frac{1}{2}$.

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

Prova in itinere di autovalutazione, 15 Dicembre 2104
SECONDA PARTE SOLUZIONI

ESERCIZIO n.1 Sia $f_n(x,y) = \dfrac{2^n(x+y)}{1+2^n(x^2+y^2)}$, $n \in \mathbf{N}$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

a) Si calcoli il limite puntuale $f(x,y)$ di $f_n(x,y)$ per $n \to +\infty$.

b) Dato $r > 0$ si provi che f_n converge uniformemente a f su $\{(x,y) : x^2+y^2 \geq r^2\}$.

c) Si mostri che la convergenza non è uniforme in $\mathbf{R}^2$.

$$\text{a) } f_n(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\text{a) } f_n(x,y) = \frac{x+y}{\dfrac{1}{2^n} + x^2+y^2}, \quad \text{ma} \quad \frac{1}{2^n} \to 0 \quad \text{per } n \to \infty.$$

b) Sia $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ il limite di $f_n(x,y)$ per $(x,y) \neq (0,0)$ e $n \to \infty$.
[**Lezioni**15-16/10/2014, **Esercitazioni** 17, 22,23/10/2014].

Bisogna mostrare che $\|f - f_n\|_{\text{Unif}(x^2+y^2\geq r^2)} = \sup\limits_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\geq r^2\}} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$

$|f(x,y) - f_n(x,y)| =$

$$= \left|\frac{x+y}{x^2+y^2} - \frac{2^n(x+y)}{1+2^n(x^2+y^2)}\right| = \frac{|x+y|}{x^2+y^2}\left|1 - \frac{2^n(x^2+y^2)}{1+2^n(x^2+y^2)}\right| \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\left|1 - \frac{2^n(x^2+y^2)}{1+2^n(x^2+y^2)}\right|$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2}}\left|\frac{1}{1+2^n(x^2+y^2)}\right| \leq \frac{2}{r}\left|\frac{1}{1+2^n r^2}\right|$$

l'ultima diseguaglianza giustificata dal fatto che si considerano solo (x,y) per cui $x^2+y^2 \geq r^2$, pertanto passando all'estremo superiore su questi punti ammissibili:

$$\sup_{\{(x,y)\,:\,x^2+y^2\geq r^2\}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{2}{r}\left|\frac{1}{1+2^n r^2}\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

c) Se la convergenza fosse uniforme su $\mathbf{R}^2$ intero, dalle teoria [**Lezione** 16/10/2014] si dovrebbe avere che il limite è definito e continuo su tutto $\mathbf{R}^2$, essendo le funzioni definite e continue su tutto $\mathbf{R}^2$. E ciò conclude la risoluzione dell'esercizio.

ESERCIZIO n. 2 Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|y|^\alpha - x^2}}{x^2+y^2}$.

$\alpha \in (-\infty; 0] \bigcup (4; +\infty)$

Per prima cosa bisogna notare che fissato $\alpha \in \mathbf{R}$ la funzione di cui si chiede l'eventuale convergeza per $(x, y) \to (0, 0)$ è definita solo su:

$$D_\alpha \ =: \ \{(x,y) : |y|^\alpha \geq x^2\} \setminus \{(0,0)\}$$

Si hanno le seguienti diseguaglianze semplificatorie

$$\frac{\sqrt{|y|^\alpha - x^2}}{|y|^\alpha + y^2} \ \leq \ \frac{\sqrt{|y|^\alpha - x^2}}{x^2+y^2} \ \leq \ \frac{|y|^{\frac{\alpha}{2}}}{x^2+y^2} \ \leq \ \frac{(x^2+y^2)^{\frac{\alpha}{4}}}{x^2+y^2} \ = \ \rho^{2(\frac{\alpha}{4}-1)}$$

la prima vera poichè siamo nel caso $|y|^\alpha \geq x^2$, le ultime sempre vere.

1) Dalle ultime diseguaglianze si ha che per $\alpha > 4$ il limite esiste nullo.

2) Per $\alpha \leq 0$ il denominatore è infinitesimo e il numeratore tende a $+\infty$ o a 1. Quindi il limite esiste divergendo positivamente.

3) Dalla prima diseguaglianza si evince che per $y \to 0$ il numeratore si comporta al meno come $|y|^{\frac{\alpha}{2}}$ e il denominatore come $|y|^\alpha$ se $\alpha < 2$ o come y^2 se $\alpha \geq 2$ e quindi se $0 < \alpha \leq 4$ il limite non dovrebbe esistere.

Per sincerarsene con sicurezza ci si restringe a $x^2 = \lambda |y|^\alpha$, con $0 < \lambda \leq 1$, ottenendo

$$\frac{\sqrt{|y|^\alpha - x^2}}{x^2+y^2} \ = \ \frac{|y|^{\frac{\alpha}{2}}}{|y|^\alpha + y^2}\sqrt{1-\lambda} \ \underset{y\to 0}{\sim} \ \begin{cases} |y|^{-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{1-\lambda} & \alpha < 2 \\ |y|^{\frac{\alpha}{2}-2}\sqrt{1-\lambda} & \alpha \geq 2 \end{cases}$$

Ora se $\lambda = 1$ tali restrizoni sono nulle e convergono quindi a 0.

Se invece $0 < \lambda < 1$:
- nel caso $0 < \alpha < 4$ limite è divergente;
- nel caso $\alpha = 4$ il limite è $\sqrt{1-\lambda} \neq 0$.

Pertanto per $\alpha \leq 4$ il limite non esiste perchè diverse restrizioni hanno limiti diversi.

NOTA: Una preliminare semplificazione poteva essere fare il seguente cambio di variabili $u = x^2$, $v = y^2$, $\beta = \frac{\alpha}{2}$

$$\frac{\sqrt{|y|^\alpha - x^2}}{x^2+y^2} \ = \ \frac{\sqrt{v^\beta - u}}{u+v} \quad , \quad T_\alpha = \{(u,v) : |v|^\beta \geq u \ , \ \ u \geq 0 \ , \ \ v \geq 0\} \setminus \{(0,0)\}$$

e studiare l'equivalente problema di convergenza $\lim_{\substack{(u,v)\to(0^+,0^+) \\ v^\beta \geq u}} \frac{\sqrt{v^\beta - u}}{u+v}$.

ESERCIZIO n. 3 a) Avendo a disposizione $16cm^2$ di materiale, e volendolo utilizzare tutto per costruire una scatola a forma di parallelepipedo, si vogliono rinforzare i bordi con un nastro. Qual'è la lunghezza minima, in cm, di nastro che necessita?

b) Cosa dire della lunghezza massima?

c) Avendo anche a disposizione 20 cm di nastro, e volendo utilizzare tutto il materiale, qual'è il volume massimo che si può ottenere?

a) $2\sqrt{6}cm$ b) Infinita c) $\dfrac{112}{27} \sim 4.148$

a) Siano $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ le "dimensioni" (anche degeneri) della scatola. La superficie della scatola sarà quindi $S(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$, il perimetro degli spigoli $P(x,y,z) = 4x + 4y + 4z$. Si tratta quindi del problema di ottimizzazione sul dominio $D = \{(x,y,z) :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ S(x,y,z) = 16\}$:

$$(P) \begin{cases} \min P(x,y,z) = 4x + 4y + 4z \\ \frac{1}{2}S(x,y,z) = xy + xz + yz = 8 \\ x \geq 0\ ,\ \ y \geq 0\ ,\ z \geq 0 \end{cases}$$

Si sceglie la risoluzione indiretta cercando il valore minimo di S tra:

- i *valori dei punti stazionari tagenziali* al vincolo $S = 16$ nell'aperto $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$,

-i *valori stazionari tangenziali* dei problemi vincolati bidimensionali ottenuti con $x = 0$ o $y = 0$ o $z = 0$, che non presentano ulteriori problemi di bordo.

Il problema è simmetrico nelle tre variabili basterà solo uno di questi casi, e.g. $x = 0$: la soluzione è il minimo tra i valori critici dei seguenti problemi, uno all'*interno* l'altro al *bordo* :

$$(Pi) \begin{cases} P(x,y,z) = 4x + 4y + 4z \\ \frac{1}{2}S(x,y,z) = xy + xz + yz = 8 \\ x > 0\ ,\ \ y > 0\ ,\ z > 0 \end{cases} \qquad (Pb) \begin{cases} P_b(y,z) =: P(0,y,z) = 4y + 4z \\ \frac{1}{2}S_b(y,z) =: \frac{1}{2}S(0,y,z) = yz = 8 \\ y > 0\ ,\ z > 0 \end{cases}$$

1) ESISTENZA. Per applicare tale metodo bisogna prima sincerarsi che il minimo esista. Osservando che la funzione S è continua conviene ridursi alle ipotesi del teorema di Weiestrass [**Lezione** 16/10/2014].
Il dominio D è chiuso perchè è intersezione di preimmagini di chiusi mediante funzioni continue [**Lezione** 16/10/2014], ma non è limitato: $y = \dfrac{1}{n}\ ,\ \ z = \dfrac{1}{n},\ \ x = (8 - \dfrac{1}{n^2})\dfrac{n}{2}$
- Si mostra che, se $S(x,y,z) = 16$, per $x^2 + y^2 + z^2$ grande $P(x,y,z)$ è maggiore di un valore a piacere tra quelli da essa assunti.
[**Lezioni, Esercitazioni** 3-9-10-11-17/12/2014].
Infatti per $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$ si ha addirittura $P(x,y,z) \to +\infty$:
se $x^2 + y^2 + z^2 \geq R^2$ almeno uno dei tre addendi deve essere *maggior o eguale a* $\frac{R^2}{3}$: quindi $P(x,y,z) \geq \frac{4R}{\sqrt{3}}$ che scegliendo $R > 5\sqrt{3}$ sarà maggiore di $P(1,2,2) = 20$.
Pertanto si può supporre $x^2 + y^2 + z^2 \leq 75$ e usare il teorema di Weiestrass.

2) VALORI CRITICI. Poichè il valore minimo esiste i punti di minimo saranno o su $D \cap \{(x,y,z) : xyz \neq 0\}$ o su $D \cap \{(x,y,z) : xyz = 0\}$, e come detto per la simmetria del problema interessandoci solo il *valore minimo* quest'ultimo caso si riduce a $D \cap \{(x,y,z) : x = 0\}$: nel caso il punto di minimo di (P) sarebbe a maggior ragione punto di minimo di (Pb). Poichè in entrambi i casi la funzione è regolare il vincolo è nelle ipotesi del Dini:

$$\nabla S(x,y,z) = (y+z, x+z, x+y) = (0,0,0) \Longleftrightarrow y = -z = x = -y \Longleftrightarrow x = y = z = 0$$
$$\nabla S_b(y,z) = (z,y) = (0,0) \Longleftrightarrow y = z = 0$$

si possono impostare i sistemi di Lagrange per trovare i valori critici tangenzali per (Pi) e per (Pb)

$$(L_i) \begin{cases} 4 & = \lambda(y+z) \qquad (dx) \\ 4 & = \lambda(x+z) \qquad (dy) \\ 4 & = \lambda(x+y) \qquad (dz) \\ & xy + xz + yx = 8 \\ & x > 0\,, \quad y > 0\,, \quad z > 0 \quad (V) \end{cases} \qquad (L_b) \begin{cases} 4 & = \lambda z \qquad (dy)_b \\ 4 & = \lambda y \qquad (dz)_b \\ & yz = 8\,, \quad y > 0\,, \quad z > 0 \quad (V)_b \end{cases}$$

(L_i): deve essere $\lambda \neq 0$ pertanto moltiplicando in croce le relazioni (dx) e (dy), (dy) e (dz), e dividendo per 4λ si ottengono $x+z = y+z$ e $x+y = x+z$ pertanto $x = y = z$.Quindi da (V) $x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{8}{3}$, per cui il valore critico è $3\sqrt{\dfrac{8}{3}} = 2\sqrt{6}$.

(L_b): deve essere $\lambda \neq 0$, come sopra si ottiene $y = z$ e quindi $y^2 = 8$ pertanto il valore critico è $4\sqrt{2}$.

3) CONFRONTO: poichè il valore critico $2\sqrt{6}$ è minore del valore critico $4\sqrt{2}$, la minima lunghezza del nastro necessaria per rinforzare gli spigoli è $2\sqrt{6}cm$.

b) Un parallelepipedo di superficie laterale assegnata $2xy + 2xz + 2xy = 16cm^2$ può avere lunghezza degli spigoli arbitrariamente grande $y = \dfrac{1}{n}$, $z = \dfrac{1}{n}$, $x = (8 - \dfrac{1}{n^2})\dfrac{n}{2}$:
$x + y + z = 4n - \frac{1}{2n} + \frac{2}{n}$.

c) Il problema è

$$(P) \begin{cases} \max V(x,y,z) \ =: \ xyz \\ \frac{1}{2}S(x,y,z) = xy \ + \ xz \ + \ yz \ = \ 8 \\ \frac{1}{4}P(x,y,z) = x + y + z \ = \ 5 \\ x \geq 0\,, \quad y \geq 0\,, \ z \geq 0 \end{cases}$$

0) CONSISTENZA: il vincolo è non vuoto $y + z = 5 - x$, $yz = 8 - x(5 - x)$ per $x = 2$ quindi $y + z = 3$, $yz = 2$ per cui son soluzioni $y = 2$ e $z = 1$.

1) ESISTENZA: la funzione è continua, e il vincolo è chiuso perchè preimmagine di chiusi mediante funzioni continue [**Lezione** 16/10/2014]. Poichè $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ si ha $5 = x + y + z \geq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ quindi è anche limitato. Per Weiestrass esiste il valore massimo.

2) VALORI CRITICI. Poichè $V(x,y,z) = xyz \geq 0$ sul vincolo ed è nulla se una delle variabili si annulla il problema di massimo (P) è equivalente a

$$(P_i) \begin{cases} \max V(x,y,z) \ =: \ xyz \\ \\ \frac{1}{2}S(x,y,z) = xy \ + \ xz \ + \ yz \ = \ 8 \\ \\ \frac{1}{4}P(x,y,z) = x+y+z \ = \ 5 \\ \\ x>0\ , \quad y>0\ , \ z>0 \end{cases}$$

La funzione è regolare e il vincolo è nelle ipotesi del teorema del Dini

$$rango\,(\nabla S(x,y,z)\nabla P(x,y,z)) \ = \ rango \begin{pmatrix} 2y+2z & 4 \\ \\ 2x+2z & 4 \\ \\ 2x+2y & 4 \end{pmatrix} \ = \ 1 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow y+z = x+z = z+y \Longleftrightarrow x=y=z \Longrightarrow 3x^2 = 8\ , \quad 3x = 5 \text{ ma } \frac{25}{3} \neq 8,$$

quindi si imposta il sistema di Lagrange (si osservi che la funzione di vincolo $yz+xz+xy$ è la somma delle derivate parziali prime della funzione xyz da massimizzare, e la seconda funzione di vincolo $x+y+z$ è la metà della somma delle derivate prime di $yz+xz+xy$ ... come dire che l'area è la "derivata" del volume e il "perimetro" è la "derivata" dell'area):

$$(L_i) \begin{cases} yz \ = \lambda(y+z)+\mu & (dx) \\ \\ xz \ = \lambda(x+z)+\mu & (dy) \\ \\ xy \ = \lambda(x+y)+\mu & (dz) \\ \\ \quad xy+xz+yx = 8\ , \quad x+y+z = 5 \\ \quad x>0\ , \quad y>0\ , \quad z>0 & (V) \end{cases}$$

i- sommando le relazioni differenziali ed usando le condizioni di vincolo si ottiene

$$8 \ = \ 10\lambda + 3\mu$$

moltiplicando rispettivamente per x, y, z le relazioni differenziali (dx), (dy), (dz) e sommando si ottiene il valore critico in funzione dei moltiplicatori (fatto generale [**Lezione** 17/12/2014])

$$3V_{\lambda,\mu} = 3xyz \ = \ 16\lambda + 5\mu \ = \ -\frac{2}{3}\lambda + \frac{40}{3} \ = \ \frac{64}{5} + \mu$$

ii- Se $\lambda = 0$ dalle relazioni differenziali si ottiene $yz = \mu = xz = xy$.
Per cui (essendo non nulli) deve essere $x = y = z$, caso già escluso in quanto non soddisfa le condizioni di vincolo.

Se $\mu = 0$, $\lambda \neq 0$ dividendo a coppie le relazioni differenziali ancora si ha $xy = xz = yz$.

iii- Per $\lambda\mu \neq 0$ dividendo (dx) per (dy) si ottiene $\lambda(xy+zy)+y\mu = \lambda(xy+xz)+x\mu$ e

$$\lambda z(y-x) \ = \ -\mu(y-x)$$

analogamente usando le altre coppie di relazioni si ottengono

$$\lambda y(z-x) \ = \ -\mu(z-x) \ , \qquad \lambda x(z-y) \ = \ -\mu(z-y)$$

a- $y = x$: dalle condizioni di vincolo si ha $z = 5 - 2x$, $x^2 + 2xz = 8$ quindi

$$x^2 - \tfrac{10}{3}x + \tfrac{8}{3} \;=\; 0 \iff x = x_1 =: 2 \; o \; x = x_2 =: \frac{4}{3}$$

da cui si hanno i seguenti valori critici $V_1 = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{4}{3} \cdot (5 - 2\dfrac{4}{3}) = \dfrac{112}{27}$, $V_2 = 2 \cdot 2 \cdot (5 - 4) = 4$
Tali valori si ottengono anche assumendo $x = z$ o $y = z$.

b-$y \neq x$, $z \neq x$, $y \neq z$: deve essere $\lambda\, z \;= -\mu$, $\lambda\, y \;= -\mu$, $\lambda\, x \;= -\mu$: cioè $x = y = z$.

3) CONFRONTO: i valori di interesse sono 4, $\dfrac{112}{27}$ ma $27 \cdot 4 = 108$ pertanto il valore massimo cercato è $\dfrac{112}{27} \sim 4.148$.