Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

APPUNTI Lezione dell'11 Dicembre 2014.

PROBLEMI ESTREMALI PER FUNZIONI POSITIVAMENTE OMOGENEE

AVVERTENZA

nel seguito considereremo funzioni non definite in $x = 0$, salvo diverso avviso, in quanto per lo studio dei valori estremali l'eventuale caso $x = 0$ si tratta con un confronto finale.

Un sottoinsieme $D \neq \emptyset$ di uno spazio vettoriale si dice *cono positivo* se $\forall x \in D,\ t > 0$: $tx \in D$.

Per $p \in \mathbf{R}$ una funzione reale f definita su un cono positivo D si dice *positivamente p-omogenea* se $f(tx) = t^p f(x)$ per ogni $t > 0$ e $x \in D \setminus \{0\}$.

ESTREMALI

Se F è positivamente 0-omogenea su un cono D per lo studio dei valori estremali ci si può ridurre a dimensione minore per esempio restringendosi a $D \cap \partial B(0,1)$.
Se $p \neq 0$ e F è positivamente p-omogenea su un cono positivo D si ha:

$$A)\ \exists z \in D \setminus \{0\}\ F(z) > 0 \quad [\ F(z) < 0] \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_D F = +\infty \quad [\inf_D F = -\infty]$$

$$B)\ \forall x \in D\ \ F(x) \geq 0 \quad [\ F(x) \leq 0] \quad \Longleftrightarrow \quad \inf_D F = 0 \quad [\sup_D F = 0]$$

DIM. A) per ogni $t > 0$ si ha $\quad \sup\ F \ \geq\ F(tz) \ =\ t^p\ F(z)$:
se $p > 0$ si considera $t \to +\infty$, se $p < 0$ invece $t \to 0^+$. Il viceversa è immediato.

B) per ogni $t > 0$ ed x si ha $\quad 0 \leq \inf\ F \ \leq\ F(tx) \ =\ t^p\ F(x)$:
se $p > 0$ si considera $t \to 0^+$, se $p < 0$ invece $t \to +\infty$. Il viceversa è immediato.

Se $p \neq q$ e f è p-omogenea, e $g \not\equiv 0$ è q-omogenea si studia così $F = \dfrac{f}{g}$ con $D = \{g \neq 0\} \setminus \{0\}$.

Se $p = q \neq 0$ si ha:
$$\begin{cases} \displaystyle\sup_{x\neq 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{k} \max\{ \sup_{g(x)=k, x\neq 0} f(x)\ ,\ \sup_{g(x)=-k, x\neq 0} - f(x)\} \\ \\ \displaystyle\inf_{x\neq 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{k} \min\{ \inf_{g(x)=k, x\neq 0} f(x)\ ,\ \inf_{g(x)=-k, x\neq 0} - f(x)\} \end{cases} \qquad k > 0.$$

In particolare:
$$\begin{cases} \displaystyle k \sup_{x\neq 0, g(x)>0} \frac{f(x)}{g(x)} = \sup_{g(x)=k, x\neq 0} f(x) \\ \\ \displaystyle k \inf_{x\neq 0, g(x)>0} \frac{f(x)}{g(x)} = \inf_{g(x)=k, x\neq 0} f(x) \end{cases} \qquad \text{analogo per } g(x) < 0.$$

DIM. Se $g(x) \neq 0$ si ha $k\dfrac{f(x)}{g(x)} = \textit{segno}\ g(x) f\left(\dfrac{xk^{\frac{1}{p}}}{|g(x)|^{\frac{1}{p}}}\right)$. Ma $g\left(\dfrac{xk^{\frac{1}{p}}}{|g(x)|^{\frac{1}{p}}}\right) = k\ \textit{segno}\ g(x)$.

ESTREMALI VINCOLATI

per funzioni positivamente omogenee su un insieme di livello di una funzione positivamente omogenea.

VINCOLO OMOGENEO comprende i casi:
- $\{x : g(x) = 0\}$ e g è q-omogenea;
- $\{x : g(x) = c\} = \{x : g(x) - c = 0\}$ e g sia 0-omogenea ($g - c$ sarebbe ancora 0-omogenea).

Come scritto si assume $\{x : g(x) = 0\} \setminus \{0\} \neq \emptyset$.
In tale ipotesi per entrambi i casi il dominio è un cono positivo non ridotto a $\{0\}$ e il confronto con $f(0)$ si fa a posteriori. Pertanto come già scritto:

$$\text{se } f \text{ positivamente 0-omogenea: } \begin{cases} \sup\limits_{g(x)=0, x\neq 0} f(x) = \sup\limits_{\substack{g(x)=0\\|x|=1}} f(x) \\ \\ \inf\limits_{g(x)=0, x\neq 0} f(x) = \inf\limits_{\substack{g(x)=0\\|x|=1}} f(x) \end{cases} .$$

se f positivamente p-omogenea con $p \neq 0$:

$$\sup_{g(x)=0} f(x) = +\infty \quad \left[\sup_{g(x)=0, x\neq 0} f(x) = 0 \right] \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{\substack{g(x)=0\\|x|=1}} f(x) > 0 \quad \left[\sup_{\substack{g(x)=0\\|x|=1}} f(x) \leq 0 \right]$$

$$\inf_{g(x)=0} f(x) = -\infty \quad \left[\inf_{g(x)=0, x\neq 0} f(x) = 0 \right] \quad \Longleftrightarrow \quad \inf_{\substack{g(x)=0\\|x|=1}} f(x) < 0 \quad \left[\inf_{\substack{g(x)=0\\|x|=1}} f(x) \geq 0 \right]$$

VINCOLO NON OMOGENEO: è il caso in cui il vincolo è l'insieme di livello $\{x : g(x) = c\}$ di valore $c \neq 0$ *non nullo* di una funzione g positivamente q-omogenea con $q \neq 0$.

Se f è 0-omogenea e $c \neq 0$ è equivalente al caso di coni positivi:
per $c > 0$ infatti $\sup\limits_{g(x)=c, x\neq 0} f(x) = \sup\limits_{g(x)>0, x\neq 0} f(x)$, $\inf\limits_{g(x)=c, x\neq 0} f(x) = \inf\limits_{g(x)>0, x\neq 0} f(x)$.
Analogo per $c < 0$.

Se f positivamente p-omogenea con $p \neq 0$ ci *si riduce al caso* $p = q$.

Si pone $\gamma(x) = \textit{segno } g(x)|g(x)|^{\frac{p}{q}}$: è una funzione p-omogenea. Quindi si ottiene:

$$\text{se } c > 0 \quad \sup_{\substack{g(x)=c\\x\neq 0}} f(x) = \sup_{\substack{\gamma(y)=c^{\frac{p}{q}}\\y\neq 0}} f(y) \quad ,$$

$$\text{se } c < 0 \quad \sup_{\substack{g(x)=c\\x\neq 0}} f(x) = \sup_{\substack{\gamma(x)=-|c|^{\frac{p}{q}}\\x\neq 0}} f(x)$$

Si ha in particolare per $c > 0$ si ha $\sup\limits_{\substack{g(x)=c\\x\neq 0}} f(x) = c^{\frac{p}{q}} \sup\limits_{\substack{\gamma(x)>0\\x\neq 0}} \dfrac{f(x)}{\gamma(x)}$.

Per gli estremi inferiori valgono analoghe relazioni.

PROBLEMA DUALE PER FUNZIONI OMOGENEE

Sia G reale su un insieme E, si ha: $\begin{cases} \inf\limits_E G = \min\left\{ \inf\limits_{\substack{E\\G<0}} G \,,\ \inf\limits_{\substack{E\\G=0}} G \,,\ \inf\limits_{\substack{E\\G>0}} G \right\} \\[2ex] \sup\limits_E G = \max\left\{ \sup\limits_{\substack{E\\G<0}} G \,,\ \sup\limits_{\substack{E\\G=0}} G \,,\ \sup\limits_{\substack{E\\G>0}} G \right\} \end{cases}$

adottando la convenzione che $\inf\limits_{\emptyset} G = +\infty$ e $\sup\limits_{\emptyset} G = -\infty$.

se $G \geq 0$ si ha:
$$\begin{cases} \sup\limits_E G = +\infty \iff \inf\limits_E \dfrac{1}{G} = 0 \\[2ex] \inf\limits_{\substack{E\\G>0}} G = 0 \iff \sup\limits_{\substack{E\\G>0}} \dfrac{1}{G} = +\infty \\[2ex] 0 < \inf\limits_E G \quad \left[\sup\limits_E G < +\infty\right] \iff \sup\limits_E \dfrac{1}{G} < +\infty \quad \left[0 < \inf\limits_E \dfrac{1}{G}\right] \\ \text{nel caso} \\ \inf\limits_E G = \dfrac{1}{\sup\limits_E \dfrac{1}{G}} \quad \left[\sup\limits_E G = \dfrac{1}{\inf\limits_E \dfrac{1}{G}}\right] \end{cases}$$

Se f e g sono non negative, non identicamente nulle, egualmente positivamente p-omogenee:

$$0 < \inf_{\substack{g=1\\x\neq 0}} f = \inf_{\substack{g=1,f>0\\x\neq 0}} f = \inf_{\substack{g\neq 0\\x\neq 0}} \frac{f}{g} = \inf_{\substack{g\neq 0,\ f\neq 0\\x\neq 0}} \frac{f}{g} = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{g\neq 0,\ f\neq 0\\x\neq 0}} \dfrac{g}{f}} = \frac{1}{\sup\limits_{\substack{f=1\\x\neq 0}} g}$$

$$+\infty > \sup_{\substack{g=1\\x\neq 0}} f = \sup_{\substack{g=1 f\neq 0\\x\neq 0}} f = \sup_{\substack{g\neq 0\\x\neq 0}} \frac{f}{g} = \sup_{\substack{g\neq 0,\ f\neq 0\\x\neq 0}} \frac{f}{g} = \frac{1}{\inf\limits_{\substack{g\neq 0,\ f\neq 0\\x\neq 0}} \dfrac{g}{f}} = \frac{1}{\inf\limits_{\substack{f=1\\x\neq 0}} g}$$

$$\sup_{\substack{g=1\\x\neq 0}} f = +\infty \iff \inf_{\substack{f=1,g>0\\x\neq 0}} g = 0$$

TEOREMA DI EULERO

Caratterizzazione della *"locale"* positiva omogeneità per funzioni differenziabili [**Lezione** 6/11/2014].

Sia Ω un aperto ed f differenziabile in $\Omega \setminus \{0\}$.
Dati $p \in \mathbf{R}$ ed $x \in \Omega \setminus \{0\}$ per cui $B(x,r) \subseteq \Omega$ si ha:

$$\forall\, t[\ tx \in B(x,r) \Longrightarrow f(tx) = t^p\ f(x)] \iff x \cdot \nabla f(x) = p\ f(x)$$

DIM. Considera $\varphi(t) = f(tx)$: da una parte $\varphi'(1) = x \cdot \nabla f(x)$, dall'altra $\varphi'(1) = pf(x)$.
Viceversa $\psi(t) = \dfrac{f(tx)}{t^p}$: $\psi'(t) = \dfrac{x \cdot \nabla f(tx) t^p - pt^{p-1} f(tx)}{t^{2p}} = 0$ per cui $\psi(t) \equiv \psi(1) = f(x)$.

MOLTPLICATORI E FUNZIONI OMOGENEE

Siano $k \in \mathbf{R}$, f e g funzioni reali, definite su Ω aperto di $\mathbf{R}^d$, differenziabili con continuità, per cui $\nabla g(x) \neq 0$ per $x \in V = \{x : g(x) = k\} \neq \emptyset$. I punti tra cui eventualmente trovare quelli di massimo e minimo di f ristretta a V:

$$\max_{g=k} f \ , \quad \min_{g=k} f$$

son i punti $x \in V$ stazionari-tangenziali a V di f, [**Lezione** 4/12/2014], cioè quelli per cui $\nabla f(x)$ sia ortogonale al tangente nel punto x a V. Sono appunto le soluzioni del sistema di Lagrange:

$$\text{vi sia } \lambda \in \mathbf{R}: \qquad \nabla f(x) = \nabla \lambda \cdot g(x) \quad \text{ e } \quad g(x) = k \qquad \text{cioè:}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) & = \quad \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) & = \quad \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) \\ & \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_d}(x) & = \quad \lambda \frac{\partial g}{\partial x_d}(x) \\ g(x) - k & = 0 \end{cases}$$

Ovvero le prime componenti dei punti stazionari di $\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) - \lambda \cdot (g(x) - k)$.

Se poi f è positivamente p-omogenea e g è positivamente q omogenea, definite in $\mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ (o anche su un cono), grazie al teorema di Eulero, per le soluzioni (x, λ) del sistema di Lagrange si ha

$$pf(x) \ = \ x \cdot \nabla f(x) \ = \ x \cdot \nabla \lambda g(x) \ = \ \lambda \ q \ g(x) \ = \ \lambda \ q \ k$$

a livello di manipolazione del sistema ciò corrisponde a moltplicare l'equazione delle derivate parziali i^e per la variabile x_i e quindi sommarle tutte.

1- Quindi se $p \neq 0$ si ha che il *valore critico* $V_c(x, \lambda)$ di f nell'eventuale punto stazionario tangenziale *corrispondente* al moltiplicatore λ è

$$V_c(x, \lambda) \ = \ \lambda \ \frac{q}{p} \ k$$

la dipendenza da x essendo appunto in λ.

2- Se altrimenti $p = 0$ per il teorema di Eulero si ha che ∇f ha componente radiale nulla, cioè è tangente alle sfere centrate nell'origine. Si hanno i casi: una soluzione x del sistema di Lagrange è

- i- un punto di V stazionario in $\mathbf{R}^d$ ("libero") per f cioè
$$g(x) = k \text{ e } \nabla f(x) = 0,$$
- ii- un punto di V per cui $x \cdot \nabla g(x) = 0$ ovvero sempre per il teorema di Eulero
$$g(x) \ = \ k \qquad \text{e} \qquad q \ g(x) = 0,$$

il secondo è escluso se non quando il vincolo sia omogeneo: infatti se $g(x) = 0$ dev'esser $k = 0$ (poichè $g(x) = k$ per ipotesi), altrimenti deve esser $q = 0$.