

DERIVATE DIREZIONALI ITERATE

Se $v \in \mathbf{R}^d$ è non nullo è definito l'operatore differenziale di derivazione rispetto a v , che associa ad una funzione f di d variabili la sua eventuale derivate direzionele lungo v :

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial v} \right) f \right) (x) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) =: \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}, \quad \frac{\partial f}{\partial \rho v}(x) = \rho \frac{\partial f}{\partial v}(x), \quad \rho \neq 0.$$

Se una funzione f è differenziabile in x si ha: $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = d_x f v = \langle \nabla f(x), v \rangle = \sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$.

Se $g(t) =: f(x + tv)$ si ha per la regola della catena: $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial v}(x + tv) = (v \cdot \nabla) f(x + tv)$.

Si osserva che si ottiene un polinomio omogeneo di primo grado, cioè un funzione lineare omogenea, nelle variabili v_1, \dots, v_d delle coordinate di v . Nel caso si usa la notazione:

$$\frac{\partial}{\partial v} = v \cdot \nabla, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(x) = v \cdot \nabla f(x) = (v \cdot \nabla) f(x).$$

Per le funzioni due volte differenziabili si può iterare questo tipo di derivata :

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} \right) f \right) \right) (x) &= \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) (x) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^d v_i \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d v_i v_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \end{aligned}$$

cioè, denotando con $Hf(x)$ la matrice Hessiana delle derivate parziali seconde in x :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right) (x) = \langle v, Hf(x)v \rangle = {}^t v \cdot Hf(x)v.$$

Si osserva che si ottiene un polinomio omogeneo di secondo grado, cioè una quadrica omogenea nelle d variabili v_1, \dots, v_d che danno le coordinate di v .

Si useranno quindi anche le notazioni:

$$\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial v^2} = (v \cdot \nabla)^2.$$

Se si definisce $g(t) =: f(x + tv)$ si ha per la regola della catena:

$$g''(t) = \left(\frac{\partial}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v} f \right) (x + tv) = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(x + tv) = (v \cdot \nabla)^2 f(x + tv).$$

Iterando h volte si useranno le notazioni:

$$\frac{\partial}{\partial v} \cdots \frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^h = \frac{\partial^h}{\partial v^h} = (v \cdot \nabla)^h.$$

Se si definisce $g(t) =: f(x + tv)$ si ha per la regola della catena iterata h volte :

$$\frac{d^h g}{dt^h}(t) = \left(\left(\frac{\partial}{\partial v} \right)^h f \right) (x + tv) = \frac{\partial^h f}{\partial v^h}(x + tv) = (v \cdot \nabla)^h f(x + tv).$$

Anche in questo caso si ottiene un *polinomio omogeneo di grado h* , nelle d variabili v_1, \dots, v_d che danno le coordinate di v .

Per metter in evidenza la natura polinomiale, nelle coordinate della direzione, di queste derivate direzionali successive conviene usare anche le notazioni relative ai multi-indici.

MULTINDICI

(Libro P. Acquistapace Vol. 1, cap. 4.8 pagg. 263-268)

Un vettore $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_d) \in \mathbf{N}^d$ a componenti intere non negative, si dice *d -multi-indice*

La dimensione d si dice *lunghezza* del multi-indice.

Si dice *peso* o *norma* (è in effetti la norma l^1): $|\mathbf{p}| = \sum_{i=1}^d p_i$.

Dati due multiindici di egual lunghezza si scrive $\mathbf{q} \leq \mathbf{p}$ per $q_1 \leq p_1, \dots, q_d \leq p_d$.

Si definiscono inoltre: $\mathbf{p}! = p_1! \cdots p_d!$, $\binom{\mathbf{p}}{\mathbf{q}} = \binom{p_1}{q_1} \cdots \binom{p_d}{q_d}$, $\mathbf{p} \leq \mathbf{q}$.

La relazione con i monomi è chiarita dalla seguente convenzione: se $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^d$ si definisce:

$$\mathbf{v}^{\mathbf{p}} =: v_1^{p_1} \cdots v_d^{p_d}.$$

Quindi la relazione con le derivate e i multi-indici è messa in evidenza dalle seguenti notazioni:

$$D^{\mathbf{p}} = D_1^{p_1} D_2^{p_2} \cdots D_d^{p_d} = \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}} =: \frac{\partial^{|\mathbf{p}|}}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}}$$

Lemma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{v}^h}(x^0) &= (\mathbf{v} \cdot \nabla)^h f(x^0) = h! \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!} \frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0) \mathbf{v}^{\mathbf{p}} = \\ &= h! \sum_{p_1+\dots+p_d=h} \frac{1}{p_1! \cdots p_d!} \frac{\partial^h f}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_d^{p_d}}(x^0) v_1^{p_1} \cdots v_d^{p_d}. \end{aligned}$$

Il polinomio di Taylor di grado k e centro \mathbf{x}^0 si può pertanto scrivere come segue:

$$\begin{aligned} P_k(\mathbf{x}) &= \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} \frac{\partial^h f}{\partial (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^h}(x^0) = \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} ((\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \nabla)^h f(x^0) = \\ &= \sum_{h=0}^k \sum_{|\mathbf{p}|=h} \frac{1}{\mathbf{p}!} \frac{\partial^h f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}} = \sum_{|\mathbf{p}|=0}^k \frac{1}{\mathbf{p}!} \frac{\partial^{|\mathbf{p}|} f}{\partial \mathbf{x}^{\mathbf{p}}}(x^0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}} = \sum_{|\mathbf{p}|=0}^k \frac{1}{\mathbf{p}!} D^{\mathbf{p}} f(x^0) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^{\mathbf{p}}. \end{aligned}$$