Analisi Matematica II - 2014-2015

Ingegneria Civile, Ambientale, Edile

Paolo Acquistapace, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 6, dal 12 marzo al 26 marzo 2015

Esercizio 1 Calcolare gli eventuali limiti per $n \to \infty$ dei seguenti integrali:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin nx}{x^2+n^2} dx \ , \quad \int_{\{x^2+y^2+z^2\le 1\}} \frac{nxyz+n^2}{x^2+y^2+z^2+n^2} dxdydz \ , \quad \int_0^\pi \frac{n\sin x + x}{\sin x + n} dx \ .$$

$$\int_0^2 \frac{nx+3\sqrt{n}x^2}{(nx+2)\sqrt{|x-1|}} \, dx \ , \quad \int_{\frac{1}{n}}^n \frac{|\sin x|^n}{x^a} \, dx \quad (a>1) \ , \quad \int_0^\infty \frac{nx - e^{2x}}{x^2e^x + ne^{3x}} \, dx.$$

$$\int_0^n \frac{\mathrm{artan} x}{1+(x-n)^2} \, dx \ , \quad \int_0^\infty \sqrt[n]{n+x^2} e^{-\frac{n}{n+1}x} \, dx.$$

Esercizio 2 a- La serie di funzioni $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4^k+x^2}$ converge in $L^1(0;+\infty)$?

b- (esercizio 3 cap.3.12 dispense di Analisi 2 di Paolo Acquistapace) Date le funzioni misurabili f_k, $k \in \mathbb{N}$, non negative quasi ovunque in $\mathbb{R}^N$ si ha:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^N} f_k(x) dx \right) \ = \ \int_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) \, dx$$

Esercizio 3 a- La funzione continua $\dfrac{\sin x}{x}$ è Riemann integrabile in senso improprio su $]0;+\infty[$ ma non è assolutamente Riemann integrabile in senso improprio, anzi non è *Lebesgue integrabile* (tanto meno Lebesgue sommabile) .
[Si scriva l'integrale sulla semiretta come serie degli integrali su $[k\pi;(k+1)\pi]$ ottenendo una serie a segni alterni.]
b- Si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^n \, dx.$
La funzione $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^k$ è ben definita per $x \neq 0$ Lebesgue misurabile ma non Lebesgue sommabile su $\mathbb{R}$. [Si studi $g(x)$ per $x \to 0^+$].

Esercizio 4 Se f è Lebesgue sommabile in $\mathbb{R}^N$ allora $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \int_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\ge R\}} f(x) \, dx \ = \ 0.$
[Si scriva l'integrale di $|f|$ su $\mathbb{R}^n$ come serie degli integrali su corone sferiche N-dimensionali di centro l'origine disgiunte].

Esercizio 5 a- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n^3} \frac{1}{k+n^2}$. b- Per quali a: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\{x^2+y^2\le n^a\}} \frac{\mathrm{artan}(n(x^2+y^2))}{x^2+y^2+n^2} dxdy < \infty$?
[Per provare i casi di non finitezza: si scriva l'integrale come somma degli integrali su corone circolari di centro l'origine e disgiunte, riducendosi al punto a-].

Esercizio 6 (es.11 cap.3.12 A.2 Acq.) Per ogni $p,\ q > 0$ si provi che $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx \ = \ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p+kq}$.

Esercizio 7 Calcolare se esistono:
a- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{1+x^{2n}}}\,dx$. [Spezzare il dominio ed usare funzioni dominanti diverse].

b-(es.13 cap.3.12 A.2 Acq.) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{n} \frac{1}{x^{-n}+x^2}\,dx$, (es.13) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{nx+x^2}{1+nx^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\sqrt{x}}\,dx$,

• $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^{\infty} \frac{xe^{-nx}}{1+e^{-nx}}\, e^{-\sqrt{x}}\,dx$ (al variare di $a \in [-\infty;+\infty[$).
[Su parte del dominio si usi convergenza monotona, sul rimanente dominata].

Esercizio 8 a- Dati $A, B \in \mathbb{R}$ si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A^B \cos(nt)\,dt$.

b- Se f è continua nulla fuori da un intervallo si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A^B f(t)\cos(nt)\,dt$.

• c- Se f è Lebesgue sommabile sulla retta si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A^B f(t)\cos(nt)\,dt$.

d- (Premessa) Se $0 < a < b$ allora $\frac{b}{a}$ non è razionale se e solo la successione di Euclide dei resti della divisione intera definita da

$$\begin{cases} & & a > r_0 \geq 0 & b = & N_0 a + r_0 & N_0 \in \mathbb{N} \\ r_1 = r_0 = 0 & \text{o} & r_0 > r_1 \geq 0 & a = & N_1 r_0 + r_1 & N_1 \in \mathbb{N} \\ r_2 = r_1 = 0 & \text{o} & r_1 > r_2 \geq 0 & r_0 = & N_2 r_1 + r_2 & N_2 \in \mathbb{N} \\ r_{n+1} = r_n = 0 & \text{o} & r_n > r_{n+1} \geq 0 & r_{n-1} = & N_{n+1} r_n + r_{n+1} & N_{n+1} \in \mathbb{N} \end{cases}$$

è strettamente decrescente (non definitivamente nulla) infinitesima
ovvero $\inf\{Ha + Kb > 0 : H \in \mathbb{Z},\ K \in \mathbb{Z}\} = 0$.

e- Si provi che se $0 < z < 2\pi$ e $\frac{\pi}{z}$ non è razionale allora l'insieme descritto al variare di $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$ da $nx \ + 2k\pi$ è denso in $\mathbb{R}$.

f- Fissato $x \in \mathbb{R}$ si provi che per ognuna delle successioni $\sin nx$, $\cos nx$, con $n \in \mathbb{N}$, si ha: se $x \in \mathbb{Z}2\pi$ sono costanti, se $x \in \mathbb{Q}2\pi$ sono periodiche, se $x \notin \mathbb{Q}2\pi$ sono dense in $[-1;1]$.

Esercizio 9 a- Per quali $a > 0$ il seguente integrale esiste finito $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{x^{-2}-x^2}}{k^a + k^{-6} + 1} dx$?

b- Per quali $a > 0$ il seguente integrale esiste finito $\displaystyle\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{x^{-2}-x^2} + \sin kx}{k^a + k^{-6} + 1} dx$?

Esercizio 10 Studiare la derivabilità a destra in $t = 0$ della funzione $\displaystyle\mathcal{I}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

Esercizio 11 a- Calcolare il limite per $x \to 0^+$ della funzione $\displaystyle\int_{x\log x}^{x^3} \sin\sin(xt)\,dt$.

b- Calcolare il limite per $x \to 0^+$ della funzione $\displaystyle\int_{\log x}^{x^3} \sin\sin(xt)\,dt$.

Esercizio 12 a- Data una successione di numeri a_n, $n \in \mathbb{N}$ si definisca $f(x) = a_{[x]}$, per $x \geq 0$, essendo $[x]$ la parte intera di x. Si esprima $\displaystyle\int_0^7 f(x)\, dx$ in termini della successione.

b- Se $a_{n+1,m} \geq a_{n,m} \geq 0$ per $n,\ m \in \mathbb{N}$ allora $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \ = \ \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\lim_{n\to\infty} a_{n,m}\Big)$.

c- Se $|a_{n,m}| \leq b_m$ per $n,\ m \in \mathbb{N}$, $\sum_{m=0}^{\infty} b_m < +\infty$, e $\exists lim_{n\to\infty} a_{n,m} =: c_m$ allora

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m} \ = \ \sum_{m=0}^{\infty} c_m$.

d- Se $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{n} a_{k,m}\right| \leq b_m$ per $n,\ m \in \mathbb{N}$, $\sum_{m=0}^{\infty} b_m < +\infty$, e $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,m}$ sono convergenti allora

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{k,m} \ = \ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,m}.$$

e- Se $a_{k,m} \geq \ 0$ allora $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} a_{k,m} \ = \ \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,m}$.

Esercizio 13 a- Fissato $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di $f_n(x, y) = \frac{n}{\sqrt{n+(x-n)^2+(y-n)^2}}$.

b- Si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(\int_0^1 f_n(x, y)\, dy\right)\, dx$.

Esercizio 14 a- Si consideri, per $y > 0$ la funzione $f(x, y) = \dfrac{1}{y}\displaystyle\int_0^y e^{-(x-s)^2} ds$: si provi che $f(x, y) \to 0$ uniformemente in $x \in \mathbb{R}$ per $y \to +\infty$.

b- Si calcoli $\lim_{y\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx$.

Esercizio 15 Calcolare se esiste $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{]0;1[} f_n(x)\, dx$ ove $\begin{cases} f_0(x) \ = \ x & x \in]0;1[\\ f_{n+1}(x) \ = \ [f_n(x)]^x & x \in]0;1[\end{cases}$