Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 4, dal 19 Novembre.

ESERCIZIO n. 1 Determinare i punti critici (stazionari) delle seguenti funzioni: $x^3+(x-y)^2$, $x^4+(x-y)^2$, $xy+y^2-3x$, $\sin(x+y)$, $x^2-\sin y$, $x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$.

ESERCIZIO n. 2 Si dica se $(0,0)$ è di massimo, di minimo, o di sella per ciascuna delle seguenti funzioni: x^4+y^4, x^4-y^4, $1-x^4-x^2y^2-y^4$.

ESERCIZIO n. 3 Determinare minimo e massimo delle seguenti funzioni nei rispettivi insiemi:

xy su $\{x^2+y^2\le 1\}$

$x^2+y^2-(x+y)$ su $\{|x|\le 1, |y|\le 1\}$

$\frac{x^2y}{x^2+4y^2}+x$ per $xy>0$ $\quad xy+x$ per $xy\le 0$ su $\{0\le y\le 1, y^2-1\le x\le 1\}$

ESERCIZIO n. 4 Sia $f(x,y)=2x^4-x^2e^y+e^{4y}$. Si calcolino l'estremo superiore e l'estremo inferiore di tale funzione e se ne calcoli il limite per $x^2+y^2\to+\infty$. Si osservi che vi sono solo due punti di minimo assoluto e nessun altro punto critico. Si traccino approssimativamente le linee di livello $f=c$, al variare di c in $\mathbf{R}$, mettendo in risalto quali sono connesse, quali sono limitate.

ESERCIZIO n. 5 Sia data un insieme di coppie $(x_i,y_i)_{1\le i\le N}$. Determinare a e b in modo tale che la funzione:

$\chi^2(a,b)=\sum_{i=1}^N(y_i-ax_i-b)^2$ sia minima. Il minimo è assoluto o relativo?

ESERCIZIO n. 6 Trovare i punti di massimo o di minimo relativo e calcolare i valori di massimo relativo e minimo relativo, delle seguenti funzioni sui domini rispettivi:

$$f(x,y)=\frac{x^4+2x^3y}{x^4+y^4}\ ,\quad y-x^2=0\ ;\quad f(x,y)=\sin((x-2)^2+y^2)\ ,\quad (1-x)^3+y^2=0\ ;$$

$$f(x,y)=x^2+6xy+3y^2\ ,\quad x^2+y^2-2xy=\frac{1}{(x+y-2)^2}\ ;$$

$$f(x,y,z)=e^{-(x^2-y+z^2)}\ ,\quad \frac{x^2}{4}+y^2+3z^2\le 1\ ;$$

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2\ ,\quad \begin{cases}(z+1)^2-y^2-(x+3)^2=0\\ z^2+y^2-(x+1)^2=0\\ z>-3\end{cases}\ ;$$

$$f(x,y,z) = (x+1)^2 + (y-\varepsilon)^2 + z \ , \quad \begin{cases} (1-x)z = (1+x)y \\ z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0 \\ z > -3 \end{cases} \quad ;$$

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, tetraedro di vertici $(-1,-1,-1)$, $(1,-1,-1)$, $(0,1,-1)$, $(0,0,1)$;

$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2$, $\max\{|x+2|, |y+3|, |z+4|\} = 1$;

$$f(x,y,z,w) = x^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{w^2}{4}, \quad \begin{cases} (x+y+z+w)^2 + (x-y+z-w)^2 = 1 \\ (x-y-z+w)^2 + (x-y-z-w)^2 = 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 7 Provare che l'insieme $D = \left\{(x,y,z) : \frac{\sqrt{x^2+\frac{y}{2}^2}-3}{4} + z^2 = 1\right\}$ è chiuso e limitato. Determinare poi la massima e la minima distanza dei punti di D dall'origine.

• ESERCIZIO n. 8 È vero che il minimo valore di $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2$ su $(x-R)^2 + (y-R)^2 = 2R^2$ è sempre 0? Giustificare la risposta.

ESERCIZIO n. 9 a- Trovare il massimo volume di un parallelepipedo rettangolo inscritto nell'ellissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.
b- Trovare l'ellissoide $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ di volume ($\frac{4}{3}\pi abc$) massimo per cui $a+b+c = M$, $a, \ b, \ c > 0$.
c- Trovare la minima distanza tra gli insiemi $\{x^2+y^2 = 1\} \cap \{yz = xz\}$ e $\{z-y = 0\} \cap \{x+y+z = 1\}$.

ESERCIZIO n.10 Sia $\mathbf{O}$ l'insieme delle matrici $n \times n$ ortogonali (${}^tMM = Id$), e sia $f : \mathbf{O} \mapsto \mathbf{R}$ definita da $f(A) = \text{tr } A$. Si dimostri che esistono unici e si calcolino i punti di massimo e minimo di f.

ESERCIZIO n.11 Dato un vettore $x = (x_1, \dots x_n)$, tale che $x_i > 0$ per ogni i e $\sum_{i=1}^n x_i = 1$, si definisce $H(x) = -\sum_{i=1}^n x_i \log x_i$. Determinare il vettore che massimizza H.

NOTA - Un insieme $C \subseteq \mathbf{R}^d$ è detto *convesso* se contiene interamente i segmenti delimitati dai suoi punti: se $x \in C$, $y \in C$ e $\lambda \in [0;1]$ allora $\lambda x + (1-\lambda)y \in C$.
- Una funzione $f : C \to \mathbf{R}$, $C \subseteq \mathbf{R}^d$, si dice *convessa* se C è convesso e se $\lambda \in [0;1]$ allora $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.
(Ciò vuol dire che le corde tra due punti del grafico di f son sopra al grafico di f ristretta al segmento che è proiezione ortogonale della corda in questione sul dominio C).
Ciò è equivalente a chiedere che il sopragrafico di f : $\{(x,y) \in C \times \mathbf{R} : \ f(x) \leq y \ \}$ sia convesso.
- La funzione si dirà *strettamente convessa* se inoltre per $0 < \lambda < 1$ vale $f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$. (Ovvero il grafico di f non contiene segmenti).

ESERCIZIO n. 12 a- Sia Ω un aperto convesso di $\mathbf{R}^d$, e sia $f : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ differenziabile.

Dimostrare che f è convessa se e solo se, per ogni $x, y \in \Omega$: $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq 0$ dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ rappresenta il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$.
b- Nelle stesse ipotesi si deduca che f è convessa se e solo se il suo grafico sta sopra ogni piano tangente ad esso.
c- Se poi f è C^2 si provi che f è convessa se e solo se la matrice Hessiana $Hf(x)$è semidefinita non negativa in ogni punto $x \in \Omega$.

ESERCIZIO n. 13 a- Sia $f : \Omega \subset \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ una funzione strettamente convessa, ove Ω è un aperto convesso. Si dimostri che f ha al più un punto estremale interno a Ω.
b- Una funzione continua convessa a valori reali, definita su $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso limitato, assume valore massimo su $\partial\Omega$.
• c- Una funzione continua convessa a valori reali, definita su $C = \bar{\Omega}$, con Ω aperto convesso limitato, assume valore massimo solo su $\partial\Omega$ a meno che non sia costante.

ESERCIZIO n. 14 a- Se $u \in C^2(\mathbf{R}^n)$ e $\triangle u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} > 0$ allora u non ha punti di massimo locale.
• - Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, Ω aperto limitato, se $\triangle u \geq 0$ allora $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.
(Si consideri x_0 di massimo su $\bar{\Omega}$ di u e $v(x) = u(x) + \varepsilon|x - x_0|^2$. Si applichi il precedente punto a v.)
- Si deduca che se $\triangle u \geq 0$ allora u non ha punti di massimo locale stretto.

• b- Si provi che se Ω é un aperto limitato, $f \in C(\mathbf{R}^n)$, $g \in C(\mathbf{R}^n)$ allora vi é *al piú una* funzione u definita su $\overline{\Omega}$ che risolve:

$$\begin{cases} \triangle u(x) \;=\; f(x) & x \in \Omega \\ u(x) \;=\; g(x) & x \in \partial\Omega \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) \end{cases}$$

- Si provi che per questa eventuale soluzione si ha:

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| \;\leq\; \max_{\partial\Omega} |g| \;+\; \frac{(\mathrm{diam}\Omega)^2}{2n} \max_{\overline{\Omega}} |f|.$$

NOTA: Si puó provare inoltre:
- se Ω é un *connesso* aperto (due suoi punti posson esser sempre congiunti da un cammino continuo sempre contenuto nell'aperto), $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\triangle u \geq 0$, allora se u assume massimo in $\overline{\Omega}$ allora lo assume **solo** sul bordo $\partial\Omega$ oppure u é costante.
- se Ω é un connesso aperto, $u \in C^2(\Omega)$, $\triangle u = 0$, allora u non assume ne massimi ne minimi locali interni in Ω a meno che non sia costante.

ESERCIZIO n. 15 Utilizzando quanto dimostrato nel precedente esercizio si trovino tutte le soluzioni delle equazioni:

$$\begin{cases} \triangle u(x,y) \;=\; 0 & x^2 + y^2 < 1 \\ u(x,y) \;=\; \left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)^2 & x^2 + y^2 = 1 \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{x^2 + y^2 < 1\} \end{cases}$$

• $$\begin{cases} \triangle u(x,y) \;=\; 0 & \max\{|x|, |y|\} < \pi \\ u(x,y) \;=\; \sin x \cos y & \max\{|x|, |y|\} = \pi \\ u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega) & \Omega = \{\max\{|x|, |y|\} < \pi\} \end{cases}$$