Analisi Matematica II - 2014-2015

Ingegneria Civile, Ambientale, Edile

Paolo Acquistapace, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 8, dal 13 al 16 aprile 2015

Integrali 3: Calcolo in coordinate curvilinee e miscellanea

Esercizio 1 Calcolare le misure dei seguenti insiemi e gli integrali, sui rispettivi domini, delle seguenti funzioni:

(i) $x+y$, $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ \sqrt{3}|y| < x\}$; (ii) $\dfrac{1}{x+y}$, $\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1,\ \sqrt{3}|y| < x\}$;

(iii) $\{(x,y,z) :\ (x-1)^2+y^2 \le z \le 2-2x\}$; (iv) $\{(x,y,z) :\ x^2+y^2 \le z \le 2-2x\}$;

(v) $\dfrac{1}{z+x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1$; (vi) $\dfrac{1}{z+x^2+y^2}$, $0 \le z \le 1-x^2-y^2$;

(vii) $\Big\{(x,y,z) :\ z^2 \le r^2 - (\sqrt{x^2+y^2}-R)^2\Big\}$, $r < R$, toro ;

(viii) $\big\{(x,y,z,w) :\ x^2+y^2 \le R^2,\ z^2+w^2 \le r^2\big\}$ toro spiacciato ;

(ix) $x^2+y^2+z^2$, $\{(x,y,z) : a^2(x^2+y^2) \le z^2 \le R^2-x^2-y^2\}$;

(x) x^2+y^2 , $\{(x,y,z) : a^2(x^2+y^2) \le z^2 \le R^2-x^2-y^2\}$;

(xi) $\sin\left(\dfrac{x^3+y^3}{xy}\right)$, $\{(x,y) :\ x^2 \le 2y,\ y^2 \le x\}$.

Esercizio 2 Calcolare

(i) $\displaystyle\int_{[0;1]\times[0;1]} |y-2x|\,dxdy$; (ii) $\displaystyle\int_{B((0,0);1)\cap\{|y|\le|x|\}} |2x^2-1|\,dxdy$; (iii) $\displaystyle\int_{\{y^2+z^2\le e^{-2x^2}\}} |y+z|\,dxdydz$;

(iv) $\displaystyle\int_{B((0,0);1)\setminus B((0,1);1)\cup B((0,-1);1)} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$; (v) $\displaystyle\int_{B((0,0,0);1)\cap\{|x+y+z|\le1\}} |x+y+z|\,dxdydz$

Esercizio 3 a) (Guldino 1.0-Pappo)
(esercizio 9 cap.3.14 dispense di Analisi 2 di Paolo Acquistapace)
Si provi che in $\mathbb{R}^3$ il volume di un solido di rotazione di un sottoinsieme piano, connesso e misurabile, che non intersechi l'asse di rotazione complanare, è uguale al prodotto dell'area della figura ruotante per la lunghezza della circonferenza descritta dal suo baricentro.

b) (Guldino 1.1-Pappo) (es.8 cap.3.14, A.2P.A.) Si consideri $D = \{a \le z \le b,\ 0 \le x \le f(z)\}$ con $a \ge 0$ e f misurabile non negativa; si denotino con (x_D, z_D) le coordinate del suo baricentro. Il volume del solido di rotazione per un angolo α di D attorno all'asse x è dato da:

$$V_z x = \alpha\int_a^b z\cdot f(z)\,dz = \alpha\cdot\mathrm{Area}(D)\cdot x_D = \mathrm{Area}(D)\cdot \text{lungh. arco percorso dal baricentro} =$$

$$= \alpha\cdot\mathrm{Area}(D)\cdot \text{distanza media dall'asse.}$$ [cfr. FOGLIO DI ESERCIZI n. 7 Es. 9 b).]

Esercizio 4 (es.4 cap.3.14, A.2P.A.) Calcolare i seguenti integrali:

(i) $\displaystyle\int_A \ln(1+xy)\,dxdy$, ove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le xy \le 2,\ y \le 2x,\ 2y \ge x\}$;

(ii) $\displaystyle\int_B \sqrt{x+y}\,dxdy$, ove B è l'insieme delimitato dalla retta $y + x = \sqrt{2}$ e dalla parabola passante per i punti $(\sqrt{2}, 0)$, $(0, \sqrt{2})$ con vertice in $(0,0)$;

(iii) $\displaystyle\int_C \frac{1}{xy}\,dxdy$, ove $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{2} \le y \le 2x,\ 2-2x \le y \le 4-2x\right\}$;

(iv) $\displaystyle\int_D (x+y)\sqrt{|x-y|}\,dxdy$, ove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1,\ x+y \ge 0\}$;

(v) $\displaystyle\int_E 2y(x-y)\sin(x^2+y^2)\,dxdy$, ove

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \le x^2+y^2 \le 16,\ y \le x \le \sqrt{3}\,y\};$$

(vi) $\displaystyle\int_F \frac{x}{y}\,dxdy$, ove $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \le y \le 2x^2,\ x \le y \le 2x\}$;

(vii) $\displaystyle\int_G x^2y^2(y^2-x^2)\,dxdy$, ove

$$G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \ge 0,\ x+1 \le y \le x+2,\ \frac{1}{x} \le y \le \frac{2}{x}\right\};$$

(viii) $\displaystyle\int_H \sin^3(x^2+y^2)\,dxdy$, ove $H \subset \mathbb{R}^2$ è l'insieme definito da

$$\frac{\pi}{2} \le x^2+y^2 \le \pi, \quad y \le |x|.$$

(ix) $\displaystyle\int_I y\,dxdy$, ove $I \subset \mathbb{R}^2$ è l'insieme definito da

$$x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad -2 \le y(x-2) \le -1, \quad 1 \le xy \le 2.$$

(x) $\displaystyle\int_J \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, ove J è la regione piana interna alle due circonferenze $(x-1)^2+y^2 = 1$, $x^2+(y-1)^2 = 1$.

(xi) $\displaystyle\int_K x\,dxdy$, ove K è il dominio del primo quadrante interno alla circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio 1 ed esterno alla circonferenza di centro $(0,1/2)$ e raggio $1/2$.

Esercizio 5 (es.5 cap.3.14, A.2P.A.) Calcolare i seguenti integrali:

(i) $\displaystyle\int_A x^2\,dxdy$, ove A è il semicerchio di centro $(r,0)$ e raggio $r > 0$, contenuto nel semispazio $y > 0$;

(ii) $\displaystyle\int_B y\,e^x\,dxdy$, ove $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \rho \le \cos\vartheta\}$;

(iii) $\displaystyle\int_C |y|\, dxdy$, ove $C \subset \mathbb{R}^2$ è la regione definita da $1 \le x^2 + y^2 \le x + \frac{1}{4}$;

(iv) $\displaystyle\int_D \frac{1}{x^2+y^2}\, dxdy$, $D =$ trapezio di vertici $(1,0)$, $(3,0)$, $(1,1)$, $(3,3)$;

(v) $\displaystyle\int_E \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy$, ove $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \le x \le r,\ x^2+y^2 \ge r^2\}$ $\quad (r > 0)$;

(vi) $\displaystyle\int_F \arctan \frac{y}{x}\, dxdy$, ove F è il dominio del primo quadrante delimitato dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 4$.

(vii) $\displaystyle\int_G \frac{dxdy}{1+x^2+y^2}$, ove G è la regione delimitata dalla curva (*lemniscata di Bernoulli*) di equazione $(x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2) = 0$.

Esercizio 6 Discutere la finitezza delle misure dei seguenti insiemi e la sommabilità delle seguenti funzioni nei domini specificati:

(i) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $B((0,0);1)$; (ii) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $B((0,0);1) \setminus B((0,1);1) \cup B((0,-1);1)$;

(iii) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\mathbb{R}^2 \setminus B((0,0);1)$; (iv) $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, $\{(x,y) : 0 \le y \le x,\ y \le yx^2 \le 1\}$;

(v) $\dfrac{1}{(x_1^2+\cdots+x_N^2)^\alpha}$, $x_1^2+\cdots+x_N^2 \le 1$; (vi) $\dfrac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^6}$, $[0;1]\times[0;1]\times[0;1]$;

(vii) $(x^2+y^2+z^2)^2$, $\sqrt{x^2+y^2} \le z^\alpha \sqrt{x^2+y^2} \le 1,\ \alpha \ge 0$;

(viii) $\dfrac{1}{x^3+y^3}$, $[0;1]\times[0;1]$; (ix) $\dfrac{1}{x^6+y^6+z^6}$, $1 \ge z^4 \ge x^2+y^2$;

(x) $\dfrac{1}{x+y}$, $[0;1]\times[0;1]$; (xi) $\dfrac{1}{x+y}$, $x^2+y^2 \le 1$;

(xii) $\dfrac{1}{\sin x + \sin y}$, $[0;1]\times[0;1]$; (x) $\left|\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right|^\alpha$, $|x|+|y| < 1,\ \alpha \ge 0$;

(xiii) $\dfrac{1-\cos\sin(xy)}{1-\cos x + \frac{y^2}{2}}$, $[0;1]\times[0;1]$; (xiv)$\bullet$ $\dfrac{1}{x^4+y^4+z}$, $x^3+y^3+1 \ge z \ge 0,\ x \ge 0,\ y \ge 0$.

Esercizio 7 Discutere la finitezza delle misure dei seguenti insiemi e la sommabilità delle seguenti funzioni nei domini specificati:

(i) $\dfrac{1}{x+y^2}$, $[0;1]\times[0;1]$; (ii) $\dfrac{1}{x^2+y^4}$, $\mathbb{R}^2\setminus B((0,0);1)$; (iii) $\dfrac{1}{x^2+y^3+z^4}$, $\mathbb{R}^2\setminus B((0,0);1)$;

(iv) $\dfrac{1}{x^2+y^4}$, $0 \le x \le \sqrt{3}y \le 3x$; (v)$\bullet$ $\dfrac{x-y}{x+y^2}$, $\exists n \in \mathbb{N} \max\{|x-n|;|y-n|\} \le \dfrac{1}{n}$;

Esercizio 8 a) Data una curva in coordinate polari $r = \Gamma(\theta)$, $\theta \in [\alpha;\beta]$ (*i.e.* $\gamma(\theta) = (\Gamma(\theta)\cos\theta, \Gamma(\theta)\sin\theta)$ mostrare che $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta \Gamma(\theta)d\theta$ calcola l'area del settore curvilineo delimitato dalla curva e con vertice l'origine: $\{(x,y) = r\Gamma(\theta),\ r \in [0;1], \theta \in [\alpha;\beta]\}$.

b) Sia $\gamma(t)$, $t \in I$ una curva piana semplice regolare. Per semplicità si assuma che non passi per l'origine e che $\gamma \mapsto \frac{\gamma}{|\gamma|}$ sia bigettiva su di un arco della circonferenza unitaria.

Si mostri che $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int |det\,(\gamma,\gamma')|\,dt$ calcola l'area del settore con vertice l'origine e delimitato da γ: $\{(x,y) :\ (x,y) = r\gamma(t),\ r \in [0;1],\ t \in I\}$.

c) A livello intuitivo, non assumendo altro che la regolatà a tratti del cammino, cosa rappresentano $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int |det\,(\gamma,\gamma')|\,dt$ e $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int det\,(\gamma,\gamma')\,dt$.

d) Sia $\sigma(s,t)$, $(s,t) \in T$ una carta di una 2-varietà regolare. Per semplicità si assuma che non passi per l'origine e che $\sigma \mapsto \frac{\sigma}{|\sigma|}$ sia iniettiva.

Si mostri che $\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_T |\langle \sigma \cdot (\sigma_s \times \sigma_t)\rangle|\,dsdt$ calcola il volume del cono con vertice l'origine e delimitato da σ: $\{(x,y,z) :\ (x,y,z) = r\sigma(s,t),\ r \in [0;1],\ (s,t) \in T\}$.

Esercizio 9 (es.7 cap.3.14, A.2P.A.) Sia E il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ descritto, in coordinate polari, dalla diseguaglianza

$$\rho \le \alpha(\vartheta), \qquad \vartheta \in [0,2\pi],$$

ove α è una funzione continua e non negativa su $[0,2\pi]$. Si calcoli $m_2(E)$. Che cosa succede quando α assume anche valori negativi?

Esercizio 10 (es.10 cap.3.14, A.2P.A.)

(i) $\displaystyle\int_A x\sqrt{1-y^2}\,dxdydz$, ove A è il dominio compreso fra il cilindro $x^2+y^2 = 1$, il piano $x+y+z = 8$ e il piano $z = 0$;

(ii) $m_3(B)$, ove B è l'insieme delimitato dal paraboloide $z = x^2+y^2$, dal cilindro $x^2+y^2 = 1$, e dal piano $z = 2$;

(iii) $\displaystyle\int_C y^2 z\,dxdydz$, ove $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1 \wedge 2z\}$;

(iv) $\displaystyle\int_D \sin^2\left(\frac{\pi}{2}(z-\sqrt{x^2+y^2})\right)\,dxdydz$, ove

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \ge 0,\ z \ge 0,\ 1-z \ge \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

Esercizio 11 (es.11 cap.3.14, A.2P.A.) *(Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^N$)* Fissato $N \ge 3$, sia $\mathbf{G} : [0,\infty[\,\times[0,\pi]^{N-2} \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^N$ l'applicazione data da $\mathbf{G}(\rho,\vartheta_1,\dots,\vartheta_{N-2},\varphi) = \mathbf{x}$, ove

$$\begin{cases} x^1 = \rho\cos\vartheta_1 \\ x^2 = \rho\sin\vartheta_1\cos\vartheta_2 \\ x^3 = \rho\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\vartheta_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^{N-2} = \rho\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\dots\sin\vartheta_{N-3}\cos\vartheta_{N-2} \\ x^{N-1} = \rho\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdot\dots\cdot\sin\vartheta_{N-2}\cos\varphi \\ x^N = \rho\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cdot\dots\cdot\sin\vartheta_{N-2}\sin\varphi. \end{cases}$$

(i) Posto $\mathbf{n} = \frac{1}{\rho}\,\mathbf{G}(\rho, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-2}, \varphi)$, si verifichi che $|\mathbf{n}|_N = 1$.

(ii) Si provi che

$$\begin{aligned} &|J_{\mathbf{G}}(\rho, \vartheta_1, \ldots, \vartheta_{N-2}, \varphi)| = \\ &\quad = \rho^{N-1}(\sin\vartheta_1)^{N-2}(\sin\vartheta_2)^{N-3} \cdot \ldots \cdot (\sin\vartheta_{N-3})^2 \cdot (\sin\vartheta_{N-2}). \end{aligned}$$

(iii) Si determini una restrizione $\mathbf{g}$ di $\mathbf{G}$ che sia iniettiva, oltre che surgettiva, su $\mathbb{R}^N \setminus \Sigma$, ove Σ è un opportuno insieme di misura nulla.

(iv) Posto $B_N(R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : |\mathbf{x}|_N \leq R\}$, si ricavi la formula

$$m_N(B_N(1)) = \frac{1}{N(N-2)!!}\pi^{\left[\frac{N}{2}\right]}\,2^{\left[\frac{N+1}{2}\right]},$$

ove $[t]$ denota la parte intera del numero reale t e $n!!$ è il prodotto di tutti i naturali fra 1 e n che hanno la stessa parità di n (convenendo che $0!! = 1$).