

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.

Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n.2, dal 10 Ottobre al 16 Ottobre 2014

Gli esercizi contrassegnati con • sono piú impegnativi.

ESERCIZIO n.1 Si disegnano in maniera approssimativa i sottoinsiemi dal piano definiti da $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = f(a, b)\}$ al variare di f e di (a, b) , nei casi seguenti:

$x^2 - y^2, (2, -1); y^3 - x^2, (0, 0); (y - x^2)^2 - x^5, (0, 0); \frac{x-y}{x+y}, (1, 1); \cos \frac{x}{y}, (\pi, 4);$
 $e^{xy}, (2, 0); \frac{x}{x^2+y^2}, (1, 2); |x| + |y|, (1, 0); \max\{|x|, |y|\}, (1, 0); |x|^p + |y|^p, p \in \mathbf{R}^+, (1, 0);$

ESERCIZIO n. 2 Si disegnano in modo approssimativo i sottoinsiemi di \mathbf{R}^3 :

$\{(x, y, z) : 2 = 3x + 5y + 7z\};$
 $\{(x, y, z) : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 121\}; \{(x, y, z) : (2x - 10)^2 + 9y^2 + z^2 \geq 111\};$
 $\{(x, y, z) : x = z^2 + y^2\}; \{(x, y, z) : x + y + z = 2x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4zx - 4zy\};$
 $\{(x, y, z) : x^2 - y^2 = z\}; \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq 1\}; \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 \leq -1\};$
 $\{(x, y, z) : x^2 - 4y^2 = 9z^2\}; \{(x, y, z) : 2z^2 = x^2 + y^2\};$
 $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 - 6\sqrt{x^2 + y^2} + 5 = 0\};$
 $\{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| = 1\}; \{(x, y, z) : \max\{|x|, |y|, |z|\} \leq 1\}; \{(x, y, z) : \sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z\}.$

ESERCIZIO n.3 Si studi l'immagine delle seguenti funzioni:

$t \in \mathbf{R} \mapsto (\sin 2t, \cos 2t), t \in \mathbf{R} \mapsto (t^2, t^3), t \in \mathbf{R} \mapsto (t \cos t, t \sin t), t \in \mathbf{R} \mapsto (\cos t, \sin t, t),$
 $t \in [2; 3] \mapsto (t + 1, 2t + 3, 3t + 4), (s, t) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (s, t, s + t), (s, t) \in \mathbf{R}^2 \mapsto (s, t, s^2 + t^2).$

ESERCIZIO n. 4 a- La funzione $f(x, y) = \begin{pmatrix} x-yx \\ 2xy \end{pmatrix}$ da \mathbf{R}^2 in se è iniettiva? È surgettiva?

b- Sia $f(x, y) = \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ 2xy \end{pmatrix} = (u, v)$: si studi l'immagine di f , si studi al variare di (u, v) come sono fatte le fibre $f^{-1}\{(u, v)\}$.

ESERCIZIO n. 5 Tra le seguenti implicazioni si provino quelle valide e si trovi un controesempio per ognuna di quelle false:

1. $\exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) \implies \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y).$
2. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) \implies \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y).$
3. $\begin{cases} \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y) = \lambda_1 \\ \exists \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y) = \lambda_2 \\ \exists \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lambda_3 \end{cases} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3.$

ESERCIZIO n.6 - Si consideri lo spazio vettoriale delle funzioni continue reali definite su un intervallo. Si mostri che $f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ è una norma su tale spazio.

- Si mostri che il rapporto tra la norma $f \mapsto \max |f|$ e $f \mapsto \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt}$ non può essere limitato al variare di f .

ESERCIZIO n. 7 Siano $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}^+$, $\rho : X \times X \rightarrow \mathbf{R}^+$, $\delta : Y \times Y \rightarrow \mathbf{R}^+$, distanze sull'insieme X e sull'insieme Y . Si discuta quale delle seguenti funzioni è ancora una distanza.

$$d_1(a, b) = \frac{d(a, b)}{1+d(a, b)} ; \quad \bullet \quad d_2(a, b) = \arctan(d(a, b)) ; \quad d_3(a, b) = \min\{d(a, b), 1\} ;$$

$$d_4((a, \alpha), (b, \beta)) = \max\{d(a, b); \delta(\alpha, \beta)\} ; \quad d_5((a, \alpha), (b, \beta)) = (d(a, b)^2 + \delta(\alpha, \beta)^2)^{\frac{1}{2}} ;$$

$$\bullet d_6(a, b) = \Psi(d(a, b)), \Psi \text{ concava, non negativa, nulla in } 0 ; \quad d_7(a, b) = \chi_{]0; +\infty[}(d(a, b)).$$

(Con χ_A si indica la funzione che vale 1 su A e 0 sul complementare di A .)

• ESERCIZIO n.8 Studiare la continuità delle seguenti funzioni tra spazi normati:

a) $Id : (C^1[0; 1], f |f| + f |f'|) \rightarrow (C[0; 1], \sup |f|)$

b) $P : (C[0; 1], f |f|) \rightarrow (C[0; 1], \sup |f|)$, ove Pf è la funzione $x \mapsto \int_0^x f^2(s) ds$.

c) $Id : (C[0; 1], \sup |f|) \rightarrow (C[0; 1], f |f|)$,

d) $Id : (C[0; 1], f |f|) \rightarrow (C[0; 1], \sup |f|)$

e) $Id : (C[0; 1], f |f|) \rightarrow (C[0; 1], \sqrt{f |f|^2})$

f) $\frac{d}{dx} : (C^1[0; 1], \sup |f|) \rightarrow (C[0; 1], f |f|)$

g) $\frac{d}{dx} : (C^1[0; 1], f |f| + f |f'|) \rightarrow (C[0; 1], \sup |f|)$

ESERCIZIO n.9 Siano V e W due spazi normati con norme $|\cdot|_V$ e $|\cdot|_W$. Data una funzione

lineare $L : V \rightarrow W$ si definisce: $\|L\| =_{def} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{|Lv|_W}{|v|_V}$.

a- Si Provi che se V e W hanno dimensione finita allora $\|L\|$ è sempre finito.

b- Si provino comunque le seguenti eguaglianze

$$\|L\| = \sup_{|v|_V=1} |Lv|_W = \sup_{0 < |v|_V \leq 1} \frac{|Lv|_W}{|v|_V} = \sup_{0 < |v|_V \leq 1} |Lv|_W.$$

c- Quindi si provi che le funzioni lineari L da V in W per cui $\|L\|$ è finita formano uno spazio vettoriale, e che $\|\cdot\|$ è una norma su tale spazio.

ESERCIZIO n.10 Si calcolino le norme, definite nel precedente esercizio, delle seguenti funzioni lineari:

$$L(x, y) = ax + by ; \quad L(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \quad x \in \mathbf{R}^n \mapsto Ax \in \mathbf{R}^n, \quad {}^tAA = I ;$$

$$L(f) = \int_0^1 f(y) dy \in \mathbf{R} = W, \quad f \in C([0; 1]) = V, \quad |f|_C = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| ;$$

$$L(f) = \int_0^x f(y) dy \in C([0; 1]) = W, \quad f \in C([0; 1]) = V = W, \quad |f|_C = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

ESERCIZIO n.11 a- Se A è una matrice $n \times n$ si provi, con la notazione dei precedenti esercizi, che $\|A\|^2 = \|{}^tAA\|$. Si mostri che non sempre $\|A\|^2 = \|A^2\|$.

b- Se si identifica una matrice $n \times n$ con un vettore di \mathbf{R}^{n^2} che relazione ha con $\|A\|$ l'usuale norma euclidea $|A|_{n^2}$?

ESERCIZIO n. 12 Si studi l'esistenza dei limiti nei domini delle seguenti funzioni, al variare di eventuali parametri, e quando possibile se ne calcoli il valore:

$$\frac{xy}{x^2+y^2}; \frac{\sin(xy)}{x^2+y^2}; x^2 \log(x^2+y^2); \frac{x \sin y}{y \sin x}; \frac{x^2 y^2}{x^2+y^4}; \frac{\sin(x|y|)}{x^2+|y|}; \frac{e^{x^2 y} - x \sin(xy) - 1}{(x^2+y^2)^2} : (x, y) \rightarrow (0, 0);$$

$$\frac{x+y}{3x+2y}; \frac{x^3+y^2}{x^2 y^2}; \frac{x^3+y^2}{x^3+y^3}; \frac{y^2+x+y}{x^2+x+y}; \frac{x^2 y^2}{|x|^\alpha + |y|^\alpha} : (x, y) \rightarrow (0, 0);$$

$$\frac{y}{x^2-y} : (x, y) \rightarrow (0, 0); \frac{y}{x^2-y} : (x, y) \rightarrow (0, 0);$$

$$x-y^2 : x^2+y^2 \rightarrow \infty; x-y^2 : x^2+y^2 \xrightarrow[2y^2 \leq x]{\infty} \infty; \frac{x^2+y}{x^2+y^2+2xy} : x^2+y^2 \rightarrow \infty;$$

$$\frac{x^2 y + x^2 z + y^2 z}{x^2+y^2+z^2}; \frac{xy+xz+yz}{x^2+y^2+z^2}; \frac{x^2+y^2+z^2}{x^4+y^4+z^4}; x^4+y^4-xyz-z^2 y; x^4+y^4+z^4-xyz : x^2+y^2+z^2 \rightarrow +\infty;$$

$$\frac{\log xy}{(x-1)^2+(y-1)^2} : (x, y) \rightarrow (1, 1);$$

$$\bullet \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2+y^4}, \frac{x^\alpha+y^\beta}{x^2+y^4} : (x, y) \rightarrow (0, 0), \alpha, \beta > 0.$$

ESERCIZIO n.13 Si studi la continuità delle seguenti funzioni:

$$f(x, y) = \int_0^y g(t, x) dt, \quad g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2);$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}; f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^3} e^{-\frac{y^2}{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}; f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases};$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy - \sin xy}{x^6+y^6} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}; f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

ESERCIZIO n. 14 Si dica se la seguenti funzioni assumono valore massimo o assumono valore minimo sui domini rispettivamente specificati:

a- $f(x, y) = \int_{\sqrt{\log(1+y^4)}}^{x^2} e^{t^2} dt, \quad D = \{|x|, |y| \leq 1\}$

b- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+4y^2} + x, & xy > 0 \\ xy + x, & xy \leq 0 \end{cases}, \quad D = \{0 \leq y \leq 1, y^2 - 1 \leq x \leq 1\}.$

• c- $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad D = \{(z+1)^2 - y^2 - (x+3)^2 = 0, z^2 + y^2 - (x+1)^2 = 0\}$

ESERCIZIO n. 15 (Criterio di CONVERGENZA TOTALE) Sia $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ una successione in uno spazio di Banach $(F, \|\cdot\|)$. Si mostri che se

$$\sum_{n \in \mathbf{N}} \|f_n\| < +\infty$$

allora la successione $S_n = \sum_{k=0}^n f_k$ converge nello spazio di Banach $(F, \|\cdot\|)$.

ESERCIZIO n. 16 Per $k \in \mathbf{N}$ si definisca $f_k(x) = \frac{1}{k} (\text{artan}(kx + k) - \text{artan}(x))$, $x \in \mathbf{R}$.

a- Per quali $x \in \mathbf{R}$ la successione di numeri $(f_k(x))_{k \in \mathbf{N}}$ è convergente?

b- Su quali intervalli la successione $(f_k)_{k \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente?

c- Per quali $x \in \mathbf{R}$ la serie numerica $\sum_{k=0}^n f_k(x)$ converge?

d- Su quali intervalli la serie di funzioni $\sum_{k=0}^n f_k$ converge uniformemente?

ESERCIZIO n. 17 Si provi che la successione di funzioni: $f_n(x) = (\sin(nx))^{2n}$, $x \in [0; 2\pi]$, non converge in tutti i punti del dominio. Si studi la convergenza verso zero delle successioni numeriche date dai seguenti integrali:

$$\int_0^{2\pi} f_n(x) dx, \quad \int_0^{2\pi} n f_n(x) dx.$$

ESERCIZIO n. 18 Si dica per quali $x \in \mathbf{R}$ quali le seguenti successioni convergono puntualmente, e su quali intervalli convergono uniformemente come successioni di funzioni:

$$\begin{aligned} & x^n; \quad nx^n; \quad \frac{1}{1+x^{2n}}; \quad \frac{n^2}{1+x^{2n}}; \quad \frac{1}{1+(x-n)^2}; \quad \min\{n; \frac{1}{x^2}\}; \quad \frac{(1+x^2)^{n+1} - 1}{(1+x^2)^n}; \quad \frac{1}{x^n + nx}; \\ & \sin \frac{x}{n}; \quad \sin \frac{x^n}{1+x^{2n}}; \quad n^2 x e^{-nx}; \quad n^{\sqrt{x}} e^{-\frac{n}{x}}; \quad e^{-n(e^{-nx})}; \quad x^{\sqrt{n}} e^{-\frac{x}{n}}; \quad |n+x|^{n+x}; \quad e^{-nx} \log nx; \\ & (\sin x)^n; \quad \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x\right)^n; \quad \int_1^n \frac{e^{-xy}}{1+y^2} dy. \end{aligned}$$

ESERCIZIO n. 19 Si dica in quali punti $x \in \mathbf{R}$ le seguenti serie di funzioni convergono puntualmente, e in quali intervalli convergono uniformemente, totalmente:

$$\begin{aligned} & \sum_n \frac{1}{1+x^n}; \quad \sum_n \frac{1}{x^n + nx}, \quad x > 0; \quad \sum_n \frac{x^3}{1+x^{2n}}; \quad \sum_n \frac{x^n}{1-x^n}; \quad \sum_n \sin \frac{x}{2^n}; \quad \sum_n \frac{\sin nx}{n^2} \\ & \sum_n n(\sin x)^n; \quad \sum_n \int_1^\infty e^{-xny^2} dy; \quad \sum_n (\text{artan}(nx+n) - \text{artan} nx); \quad \bullet \sum_n \frac{1}{n+(x-n)^2}, \quad x \in \mathbf{R}. \\ & \sum_n \frac{\log(1+nx)}{nx^n}, \quad \sum_n \frac{a^n}{n^x} \quad (a > 1), \quad \sum_n \frac{a^n}{n^x} \quad (a < 1), \quad \sum_n x^{n^2} a^n, \quad \sum_n \frac{\log n}{n^x} \end{aligned}$$

ESERCIZIO n.20 a- Si studi la convergenza puntuale delle successioni elencate.

b- Se ne studi anche la convergenza uniforme per $n \rightarrow +\infty$ su: i domini di definizione, sulle palle aperte, chiuse e sui loro complementari.

$$\begin{aligned} & \frac{2^n(x+y)}{1+n2^n(x^2+y^2)}; \quad \sum_{k=1}^n e^{k(\text{Re}z - \frac{z}{2} + 1)} \quad z \in \mathbf{C}; \quad \sum_{k=1}^n \frac{|x-y|^k}{k!} \log(k+x^2+y^2) \\ & f_n(x,y) = \frac{1}{x^n + y^n + ny}, \quad x, y > 0, \quad S_n(x,y) = \sum_{k=1}^n f_k(x,y), \quad \sum_n \sup f_n. \end{aligned}$$

ESERCIZIO n.21 a- Si studi su quali intervalli le successioni di funzioni elencate convergono uniformemente.

b- Se ne studi anche la convergenza rispetto alle altre norme o distanze indicate.

$$e^{-n(e^{-nx})}, \int_{-\infty}^0 |f|; \quad \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x\right)^n, \int_0^{2\pi} |f|;$$

$$e^{-nx} \log nx, \int_0^{+\infty} |f|; \quad \sin \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \int |f|.$$

ESERCIZIO n. 22 Per quali $x \in \mathbf{R}$ la successione numerica : $f_n(x) = \frac{n^2 \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}{1 + n^2 \sin^2\left(\frac{x}{n}\right)}$ converge? Su quali intervalli la successione di funzioni f_n converge uniformemente?

ESERCIZIO n. 23 Per $n \in \mathbf{N}$ si definisca:

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{x^3(\cos x)^n}{1-\cos x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

a- Per quali $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ la successione numerica $(g_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ converge ? Per quali la serie $\sum_n g_n(x)$?

b- La successione di funzioni converge in norma L^1 ? In norma L^2 ?

c- Su quali intervalli contenuti in $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ la successione di funzioni $(g_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge uniformemente? E la serie di funzioni $\sum_n g_n$?

• ESERCIZIO n.24 Si studi la convergenza puntuale ed uniforme sui sottoinsiemi dei domini specificati delle successione di funzioni $\{f_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, e detto f il limite si studi la convergenza puntuale ed uniforme e totale della serie $\sum_n (f_n - f)$:

$$\begin{cases} f_0(x) = 1, & x \in [0; 1] \\ f_{n+1}(x) = \sqrt{x f_n(x)} \end{cases} \quad \begin{cases} f_0(x) = \cos x, & x \in \mathbf{R} \\ f_{n+1}(x) = \cos(f_n(x)) \end{cases} \quad \begin{cases} f_0(x), & x \in [0; A] \\ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(y) dy \end{cases}$$

ESERCIZIO n. 25 Dopo aver giustificato che le integrande sono integrabili si calcolino gli integrali giustificando la risposta: $\int_{\log 2}^{\log 3} \left(\sum_n n e^{-nx}\right) dx$, $\int_0^{\infty} \left(\sum_n \frac{1}{4^n + x^2}\right) dx$.
