Analisi Matematica II - 2014-2015

Ingegneria Civile, Ambientale, Edile

Paolo Acquistapace, Vincenzo M. Tortorelli

FOGLIO DI ESERCIZI n. 7, dal 30 marzo al 9 aprile 2015

Integrali 2: Calcolo di misure e integrali per iterazioni e sezioni

Esercizio 1 Calcolare gli integrali delle seguenti funzioni sui domini rispettivamente specificati, ognuno in almeno due modi cambiando l'ordine di integrazione:

$$x^2y - y^2x,\ [1;2]\times[-3;-1];\quad \sin(x+y),\ [0;\pi]\times[0;\pi];\quad xyz,\ [1;2]\times[1;3]\times[1;4];$$

$$x_1x_2 + x_2x_3\cdots + x_{n-1}x_n,\ i \le x_i \le i+1, 1 \le i \le n.$$

Esercizio 2 (variazione esercizi 1, 2 cap.3.13 dispense di Analisi 2 di Paolo Acquistapace) Le seguenti funzioni sono integrabili nei domini rispettivamente specificati? Nel caso sommabili? Eventualmente si calcoli il valore degli integrali.

$$\frac{y}{1-xy},\ [0;1]\times[0;1];\quad \left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)[0;2]\times[0;2].$$

Esercizio 3 Si calcolino:

$$\int_{0\le y\le x\le 1}(x+y)\,dxdy\ ;\quad \int_T e^{(1-y)^2}\,dxdy,\ T \text{ triangolo di vertici } (0,0),\ (0,1),\ (1,0)\ ;$$

$$\int_{[1;2]\times[2;4]}|3x-y|\,dxdy\ ;\quad \int_{0\le y\le x^2}|x-y^2|\,dxdy\ ;$$

$$\int_T e^{x+y}\,dxdy,\ T \quad \text{triangolo di vertici } (0,0),\ (1,2),\ (3,1)\ ;$$

$$\int_{0<z<x^2+y^2<1}\left(e^{z-x^2-y^2}-1\right)dxdydz\ ;\quad \text{misura di } \{0<x,\ y,\ z,\ 0<x+y+z<1\}\ ;$$

misura della regione delimitata dalle superficie $x=0,\ x=1,\ |y|=1,\ z=0,\ z=x^2+y^2$;

mis. $\{z^2 \le x^2+y^2 \le a^2+z^2\}$; mis. $\{0 \le x^2-a^2 \le y^2+z^2 \le x^2\}$; mis.$\{x^2+z^2 \le 1,\ y^2+z^2 \le 1\}$

$$\int_A (xyz+yzw)\,dxdydzdw\ ,\quad A=\{0<x<x+w<z^2+y^2<1\}\ ;$$

$$\int_A (xyz+yzw)\,dxdydzdw\ ,\quad A=\{0<x<x+w<z+y\ ,\quad 0<y,\ z\ <1\}.$$

Esercizio 4 (esercizio 4 cap.3.13 dispense di Analisi 2 di Paolo Acquistapace)

Esercizio 5 (esercizio 5 cap.3.13 dispense di Analisi 2 di Paolo Acquistapace)

Esercizio 6 (esercizio 6 cap.3.13 dispense di Analisi 2 di Paolo Acquistapace)

Esercizio 7 Per quali $\beta > 0$ il volume di $0 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \le \left(a^{2\beta}+z^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}$ è finito?

Esercizio 8 (cfr. esempio 3.13.8 (5) dispense di Analisi 2, ed esercizio 3 Foglio 6) Osservando che $\dfrac{\sin x}{x} = \sin x \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy} dy$ si calcoli l'integrale *improprio* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Esercizio 9 (Guldino 0.0) a) Si consideri $D = \{a \le z \le b,\ 0 \le x \le f(z)\}$ con $a \ge 0$ e f misurabile non negativa; si denotino con (x_D, z_D) le coordinate del suo baricentro. Il volume del solido di rotazione per un angolo α di D attorno all'asse z è dato da:

$$V_z = \frac{\alpha}{2}\int_a^b f^2(z)\, dz \;=\; \alpha \cdot \mathrm{Area}(D) \cdot x_D \;=\; \mathrm{Area}(D) \cdot \text{lunghezza arco percorso dal baricentro} =$$

$$= \alpha \cdot \mathrm{Area}(D) \cdot \text{distanza media dall'asse}.$$

b) Si provi che $\alpha \displaystyle\int_a^b z \cdot f(z)\, dz \;=\; \alpha \cdot \mathrm{Area}(D) \cdot z_D$. Intuitivamente cosa rappresenta quest'ultimo integrale?

Esercizio 10 (esercizio 10 cap.3.13 dispense di Analisi 2 di Paolo Acquistapace)

Esercizio 11 a)(esercizio 11 cap.3.13 dispense di Analisi 2 di Paolo Acquistapace)
b) Se $p > 0$ ed f è integrabile non negativa allora

$$\int_{\{f>a\}} f(x)^p dx = p\int_a^{+\infty} t^{p-1} m\{f>t\} dt \;+\; a^p m\{f>a\}.$$