Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

Prova in itinere di autovalutazione, 15 Dicembre 2104

PRIMA PARTE SOLUZIONI

ESERCIZIO n.1 Si calcoli l'area **A** del triangolo di vertici $(1, 1, 2)$, $(2, -1, 3)$, $(-1, 3, 2)$.

A$=\sqrt{3}$. Traslando, per esempio il primo vertice, l'area non cambia e ci si riduce al triangolo di vertici $(0, 0, 0)$, $(1, -2, 1)$, $(-2, 2, 0)$: l'area di questo è metà di quella del parallelogramma quindi per la formula di Cauchy-Binet [**Lezioni** del 3,8, 9/10/2014]: $4\mathbf{A}^2 =$

$$|(1, -2, 1) \times (-2, 2, 0)|^2 = det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} = 12$$

ESERCIZIO n. 2 Sia $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x^n}$, $n \in \mathbf{N}$, $x \geq 0$:

a) si calcoli $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) =: f(x)$ b) la convergenza è uniforme ?

a) $f(x) = \begin{cases} 0 & se\ 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} & se\ x = 1 \\ 1 & se\ x > 1 \end{cases}$, b) NO.

a) Ci si basa sullo studio della convergenza di $g_n(x) = x^n$ [**Esercitazione** del 23/10/2104]. Poichè per $|x| < 1$ si ha che $x^n \to 0$ per $n \to \infty$, inoltre poich'è $x \geq 0$ si ha $\dfrac{1}{1 + x^n} \leq 1$. Pertanto in $[0; 1)$ la successione è infinitesima.
Per $x = 1$ si ha $f_n(x) = \dfrac{1}{2}$, quindi la successione è costante quindi convergente al tale valore.
Per $x < 1$ si ha $x^n \to +\infty$ per cui essendo $f_n(x) = \dfrac{1}{\frac{1}{x^n} + 1}$ si ha $f_n(x) \to 1$, per $n \to \infty$.

b) Poichè [**Lezione** del 16/10/2014] limite uniforme di funzioni continue e' continuo la convergenza non può esser uniforme essendo f_n funzioni continue e f discontinua .
In altre parole $(C([0; +\infty)), \sup |\cdot|)$ è completo: cioè è chiuso tra le limitate.

ESERCIZIO n. 3 Si calcoli al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$ la minima distanza **D** rispetto alla seminorma $L^2(-\pi; \pi)$ della funzione $f(x) = \cos x$ dalle funzioni $g_\alpha(x) = \alpha \cdot x$.

D$=\sqrt{\pi}$. La distanza rispetto alla norma $L^2(-\pi; \pi)$ è [**Lezione** del 15/1/0/2014]

$$d_{L^2}(f, g_\alpha)] = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g_\alpha(x)|^2\, dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} [(\cos x)^2 + \alpha^2 x^2 - 2\alpha x \cos x\,]\, dx} =$$

$$= \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^2\, dx + \alpha^2 \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx - 2\alpha \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x\ dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (\cos x)^2\, dx + \alpha^2 \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx}$$

$$= \sqrt{\ \pi \quad + \quad \alpha^2 \int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx}.$$ Minimo se e solo se $\alpha \ = \ 0$.

ESERCIZIO n. 4 Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha + |y|^{2\alpha}}$.

$\alpha \in [0;3)$.

Per prima cosa se $\alpha \leq 0$ la funzione non è definita su $xy = 0$. Se $\alpha = 0$ altrove è eguale a x^2y^2 che è inifnitesimo. Se $\alpha < 0$, nel dominio $xy \neq 0$, il denominatore tende all'infinito . Poichè il numeratore è infinitesimo a maggior ragione lo è la frazione data. Quindi per gli α non positivi vi è convergenza.

Per $\alpha > 0$ si nota che per $x = 0$ la funzione è nulla: per $(x,y) = (0,y) \to 0$ converge a 0.

Pertanto se fissato $\alpha > 0$ se si trovano altre restrizioni con limiti diversi da 0 il limite non esiste (per tali $\alpha > 0$).

Conviene quindi usare le variabili x e $z = y^2$ la funzione diventa $\lim_{(x,z)\to(0,0^+)} \frac{x^2z}{|x|^\alpha + z^\alpha}$. Le coordinate polari (ρ,θ) rispetto a (x,z) chiariscono la situazione:

$$\lim_{(x,z)\to(0,0^+)} \frac{x^2z}{|x|^\alpha + z^\alpha} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^\alpha(|\cos\theta|^\alpha + |\sin\theta|^\alpha)}.$$

Per $\alpha \geq 3$ restringendosi a $x = z = y^2$ cioè $\theta = \frac{\pi}{4}$, per $\alpha = 3$ il limite non esiste e per $\alpha > 3$ è $+\infty$. Pertanto per $\alpha \geq 3$ il limite non esiste.
Quindi poichè $|\cos\theta|^\alpha + |\sin\theta|^\alpha$ ha valore minimo $M > 0$ strettamente positivo (non annullandosi contemporaneamente le due funzini trigonometriche ed essendo continue su $[0;2\pi]$):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^\alpha + |y|^{2\alpha}} = \lim_{(x,z)\to(0,0^+)} \frac{x^2z}{|x|^\alpha + z^\alpha} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^\alpha(|\cos\theta|^\alpha + |\sin\theta|^\alpha)} \leq \lim_{\rho\to0^+} \rho^{3-\alpha}\frac{1}{M}.$$

ESERCIZIO n. 5 Si scriva l'equazione del piano normale in $(1,1,2)$ al luogo di zeri definito dalle equazioni $xyz = 2$, $xy + yz + xz = 5$.

$x - y = 0$.

Per prima cosa $P =: (1,1,2)$ appartiene al luogo di zeri che indichiamo con V.

Il luogo di zeri V_1 definito da $f_1(x,y,z) =: xyz = 0$ ha un vettore normale non nullo in $(1,1,2)$ dato da [**Lezione** 31/10/2014] $\nabla f_1(1,1,2) = (yz, xz, xy)_{x=1,y=1,z=2} = (2,2,1)$ pertanto è 2-varietà vicino al punto $(1,1,2)$ [Teorema del Dini **Lezione** 6, 13/11/2014].

Il luogo di zeri V_2 definito da $f_2(x,y,z) =: xy + yz + xz = 0$ ha un vettore normale non nullo in $(1,1,2)$ dato da $\nabla f_2(1,1,2) = (y+z, x+z, x+y)_{x=1,y=1,z=2} = (3,3,2)$ pertanto è 2-varietà vicino al punto $(1,1,2)$.

Essendo $V = V_1 \cap V_2$ poichè ∇f_1 , ∇f_2 in $(1,1,2)$ sono indipendenti, V è 1-varietà con tangente in $(1,1,2)$ di direzione $\nabla f_1 \times \nabla f_2$.

I coefficienti di tale direzione tangente sono quelle dell'equazione cartesiana che definisce il piano normale in $(1,1,2)$ alla curva V:

$$(2,2,1) \times (3,3,2) = (1,-1,0).$$

ESERCIZIO n. 6 Si calcoli il polinomio di Taylor del secondo ordine di centro $x = 1$ per la funzione $y = y(x)$ definita implicitamente intorno a $(1,0)$ da $e^{x+y} + x^2 + y^2 - 2x = e - 1$.

$$P_2,1(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2}(x-1)^2 \;=\; -(x-1) \;-\; \frac{2}{e}\,(x-1)^2.$$

Per prima cosa $(1,0)$ sta nel luogo di zeri.

Per il Teorema del Dini [**Lezione** 6/11/2014] il gradiente della funzione del punto $(1,0)$ essendo con la prima componente non nulla $\nabla(e^{x+y}+x^2+y^2-2x) = (e^{x+y}+2x-2, e^{x+y}+2y) = (e,e)$ vicino a $(1,0)$ il luogo di zeri è un grafico di una funzione $y(x)$ regolare C^∞.

Pertanto derivando rispetto a x l'equazione si ottiene:

$(1+y')e^{x+y} + 2x + 2yy' - 2 = 0$

da questa equazione (differenziale) sostituendo $x = 1$, $y(1) = y = 0$ si ricava $y'(1) = -1$. Derivando ulteriormente

$y''e^{x+y} + (1+y')^2 e^{x+y} + 2 + 2(y')^2 + 2yy'' = 0$

da quest'altra equazione (differenziale) sostituendo $x = 1$, $y(1) = y = 0$ e il già ricavato $y'(1) = -1$ si ottiene $y''(1) = -\frac{4}{e}$.

ESERCIZIO n. 7 Si scriva lo sviluppo di Taylor di ordine 7 e centro $(0,0,0)$ di $f(x,y,z) = \cos xyz - z\sin xy$.

$$f(x,y,z) \;=\; 1 \;-\; xyz \;-\; \frac{x^2y^2z^2}{2} \;-\; \frac{x^3y^3z}{6} \;+\; O((x^2+y^2+z^2)^{\frac{11}{2}}).$$

Si tratta di usare gli sviluppi di Taylor in 0 di una variabile, valutare i resti rispetto a $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{2}}$ e quindi usare l'unicità degli sviluppi di Taylor [esercizi della **Lezione** 27/11/2014].

$$\cos(xyz) \;=\; 1 \;-\; \frac{x^2y^2z^2}{2} \;+ O(x^4y^4z^4) \;=\; 1 \;-\; \frac{x^2y^2z^2}{2} \;+ O((x^2+y^2+z^2)^{\frac{12}{2}}) \;=$$
$$=\; 1 \;-\; \frac{x^2y^2z^2}{2} \;+ o((x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{2}})$$
$$z\sin(xy) \;=\; zxy \;- z\frac{x^3y^3}{6} \;+\; zO(x^5y^5) \;=\; zxy \;-\; \frac{zx^3y^3}{6} \;+\; O((x^2+y^2+z^2)^{\frac{11}{2}})$$

pertanto

$$\begin{aligned} \cos(xyz) - z\sin(xy) \;&=\; 1 \;-\; zxy \;-\; \tfrac{x^2y^2z^2}{2} \;+\; \tfrac{zx^3y^3}{6} \;+\; O((x^2+y^2+z^2)^{\frac{11}{2}}) \\ &=\; 1 \;-\; zxy \;-\; \tfrac{x^2y^2z^2}{2} \;+\; \tfrac{zx^3y^3}{6} \;+\; o((x^2+y^2+z^2)^{\frac{7}{2}}) \end{aligned}$$

ESERCIZIO n. 8 Si determinino i valori $\mathbf{V_M}$ di massimo, $\mathbf{V_m}$ di minimo, per $f(x,y,z) = x^2 - yz$ sulla palla unitaria definita da $x^2+y^2+z^2 \le 1$.

$\mathbf{V_M} \;=\; 1$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{V_m} \;=\; -\frac{1}{2}$

La funzione f è continua sul limitato chiuso dato da $g(x,y,z) =: x^2+y^2+z^2 \le 1$ (preimmagine di un chiuso mediante funzione continua [**Lezione** 16/10/2014]). Per il teoremi di Weiestrass e di Bolzano-Weiestrass vi sono punti in tale dominio cha e massimizzano e minimizzano f su di esso.

Si procede con metodo indiretto ad esaminare i punti che soddisfan le condizioni necessarie. Non essendoci punti singolari interni per la funzione, ed essendo la frontiera del

dominio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 2-varietà regolare in cui anche la funzione è regolare, gli unici punti su cui valutare la funzione son quelli:
- o stazionari interni
- o stazionari tangenziali alla frontiera.

$\nabla f(x, y, z) = (2x, -z, -y)$ che si annulla solo in $(0, 0, 0)$. Ma tale punto non può ne essere di valore massimo locale ne di valore minimo locale poichè $f(0, 0, 0) = 0$, ma $f(0, y, y) = y^2 < 0$, $f(0, y, -y) = y^2 > 0$ per $y \neq 0$. Figuriamoci di massimo o minimo assoluti.

Stazionarietà tangenziale: cioè gradiente della funzione ortogonale al tangente al vincolo (non c'è componente tangenziale della crescita): moltiplicatori di Lagrange [**Lezione, Esercitazione** 11/12/2014]: $\nabla f = \lambda \nabla g$ sul vincolo:

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x & (dx) \\ -z = \lambda 2y & (dy) \\ -y = \lambda 2z & (dz) \\ 1 = x^2 + y^2 + z^2 & (V) \end{cases}$$

i) Deve essere $\lambda \neq 0$ se no si annullano le tre variabili e non si sta sul vincolo.
ii) Si osserva dalle (dy) , (dz) che $z = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Se $y = z = 0$ da (V) si ha che $x = \pm 1$.

$$f(\pm 1, 0, 0) = 1$$

iii) Si esamina il caso $yz \neq 0$ e $x = 0$. Da (dy) e (dz) moltplicando in croce le due equazioni e dividendo per 2λ si ha $y^2 = z^2$. Inoltre da (V) $2y^2 = 1$ per cui $y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}\ , \quad f(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}\ , \quad f(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{1}{2}\ , \quad f(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2}$$

iii) Rimane il caso $xyz \neq 0$ che si riconduce al precedente moltiplicando (dy) per y, (dz) per z eguagliando i secondi membri e dividendo per 2λ.

Dovendoci esser punti di valore massimo e minimo, ed essendo sulla frontiera, i valori negli unici punti candidati sono 1, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$. Il massimo e il minimo tra questi sono i valori cercati.

Analisi Matematica II, Anno Accademico 2014-2015.
Ingegneria Edile, Civile, Ambientale

Paolo Acquistapace, Laura Cremaschi, Vincenzo M. Tortorelli

Prova in itinere di autovalutazione, 15 Dicembre 2104
SECONDA PARTE SOLUZIONI

COGNOME		N. MATRICOLA	
NOME		ANNO ISCRIZIONE	

ISTRUZIONI al fine della valutazione:
-*compilare l'intestazione in stampatello maiuscolo*
- si risolva il maggior numero di esercizi, in tutti i loro punti, *riportando con ordine* lo svolgimento della soluzione e *motivandolo accuratamente*.

ESERCIZIO n.1 Sia $f_n(x,y) = \dfrac{2^n(x+y)}{1+2^n(x^2+y^2)}$, $n \in \mathbf{N}$, $(x,y) \in \mathbf{R}^2$.

a) Si calcoli il limite puntuale $f(x,y)$ di $f_n(x,y)$ per $n \to +\infty$.

b) Dato $r > 0$ si provi che f_n converge uniformemente a f su $\{(x,y) : x^2+y^2 \geq r^2\}$.

c) Si mostri che la convergenza non è uniforme in $\mathbf{R}^2$.

ESERCIZIO n. 2 Per quali $\alpha \in \mathbf{R}$ esiste $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|y|^\alpha - x^2}}{x^2+y^2}$.

ESERCIZIO n. 3 a) Avendo a disposizione $16cm^2$ di materiale, e volendolo utilizzare tutto per costruire una scatola a forma di parallelepipedo, si vogliono rinforzare i bordi con un nastro. Qual'è la lunghezza minima, in cm, di nastro che necessita?

b) Cosa dire della lunghezza massima?

c) Avendo anche a disposizione 20 cm di nastro, e volendo utilizzare tutto il materiale, qual'è il volume massimo che si può ottenere?