Curriculum dell'attività scientifica e didattica

Daniele Alessandrini

22 Luglio 2010

Indice

Curriculum Vitae

Dati Anagrafici

Nome: Daniele Alessandrini
Luogo e data di nascita: Roma, il 2 giugno 1980
Nazionalità: Italiana
Stato civile: Celibe.

Situazione professionale

Post-doc del C.N.R.S. in Geometria.

Institut de Recherche Mathématique Avancée de Strasbourg
UMR 7501 dell'Università di Strasburgo e del CNRS
7 rue René-Descartes,
67084 Strasbourg Cedex, France.
Telefono: +33 (0)3 68 85 01 36
Indirizzo e-mail : daniele.alessandrini@gmail.com

Temi di ricerca

Geometria iperbolica, Geometria e topologia in dimensione bassa.
Geometria tropicale, Geometria algebrica.

Spazi di Teichmüller: Compattificazione di Thurston, tropicalizzazione degli spazi di Teichmüller, spazi di Schottky e loro tropicalizzazione, spazi di Teichmüller per superfici di tipo infinito, distanza di Teichmüller, distanza length spectrum, coordinate di Fenchel-Nielsen.

Rappresentazioni di gruppi: Varietà dei caratteri, A-polinomio, azioni su alberi reali e su Buildings.

Varietà proiettive reali convesse: distanza di Hilbert, spazi di parametri e loro compattificazione e tropicalizzazione, complessificazione di varietà proiettive reali convesse.

Geometria complessa: tubi di Lempert, convessità olomorfa, distanza di Kobayashi, superfici di Riemann, applicazioni quasi-conformi.

Superfici proiettive complesse: distanza di Thurston, graphting, spazi di parametri.

Geometria tropicale: Tropicalizzazione di insiemi semi-algebrici reali, tropicalizzazione degli spazi di Teichmüller e altri spazi di parametri di strutture geometriche, tropicalizzazione dello schema di Hilbert, e suo uso come spazio di parametri di varietà tropicali.

Relazioni fra i suddetti argomenti.

Formazione

Settembre 1994 – Giugno 1999: Studente al "Liceo Scientifico A. Avogadro", Roma.
Marzo 1999: Primo posto alla gara di immatricolazione gratuita alla Terza Università di Roma.
Settembre 1999: 13^{o} posto al concorso di ammissione alla Scuola Normale Superiore, Pisa.
1 Ottobre 1999 – 30 Ottobre 2003: Studente del corso di Laurea in Matematica all'Università di Pisa e studente della classe di Scienze alla Scuola Normale Superiore, Pisa.
Ottobre 2003: Primo posto al concorso di ammissione al Ph.D. in Geometria alla SISSA, Trieste.
30 Ottobre 2003: Discussione della Tesi di Laurea: titolo "Compattificazioni di varietà di caratteri e applicazioni topologiche", relatore prof. R. Benedetti, voto finale 110/110 *cum laude*.
Novembre 2003: 3^{o} posto al concorso di ammissione al Corso di Perfezionamento in Matematica alla Scuola Normale Superiore, Pisa.
3 Dicembre 2003: Diploma di Licenza alla Scuola Normale Superiore, argomento "Incompressible surfaces in knot manifolds", voto 70/70 *cum laude*.

Dottorato

1 Gennaio 2004 – 31 Dicembre 2006: Studente del Corso di Perfezionamento in Matematica alla Scuola Normale Superiore, Pisa. Corso di studi equivalente ad un dottorato di ricerca.
20 Dicembre 2007: Discussione della Tesi di Perfezionamento: titolo "A tropical compactification for character spaces of convex projective structures"; relatore prof. R. Benedetti; Comissione: R. Benedetti, A. Berarducci, I. Itenberg, B. Martelli, M. Salvetti, G. Tomassini, A. Vistoli; voto 70/70 *cum laude*. Titolo di studio equipollente con il titolo di **Dottore di Ricerca**.
4 Marzo 2009: Ho ottenuto il titolo di "Qualification aux fonctions de Maître de Conférences", nella sezione 25 (Matematica), titolo che abilita a partecipare ai concorsi per ricercatore universitario in Francia.

Attività Didattica

Settembre 2004 – Settembre 2005: Esercitatore di “Algebra Lineare”, corso per studenti del primo anno del corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni all’Università di Pisa, titolare prof. Carlo Petronio.
Settembre 2004 – Luglio 2005: Tutor per studenti del primo anno di matematica e di fisica della Scuola Normale Superiore in connessione con il corso di “Analisi” tenuto dal prof. L. Ambrosio.
Settembre 2005 – Luglio 2006: Tutor per studenti del primo anno di matematica e di fisica della Scuola Normale Superiore in connessione con il corso di “Geometria” tenuto dal prof. G. Tomassini.
Settembre 2006: Correttore per lo scritto di matematica per l’esame di ammissione alla Scuola Normale Superiore.

Posizioni

1 Gennaio 2004 – 31 Dicembre 2006: Borsa di studio come studente del Corso di Perfezionamento alla Scuola Normale Superiore, Pisa. Corso di studi equivalente ad un dottorato di ricerca.
Gennaio 2007 – Settembre 2007: Borsa di studio con argomento “Proprietà geometriche delle varietà reali e complesse” presso l’Università di Pisa.
1 Ottobre 2008 – 30 Settembre 2010: Borsa Post-Doc del CNRS “M.P.P.U./11” con argomento “Représentations de groupes de surfaces, espaces de Teichmüeller, géométrie tropicale et applicationsà la quantification”, presso l’ “Institut de Recherche Mathématique Avancée”, Strasbourg.
1 Ottobre 2010 – 30 Settembre 2011: Invitato per una visita al Max-Planck-Institut für Mathematik, a Bonn. Ho anche ricevuto degli inviti per una posizione post-doc di due anni al Center for the Quantum Geometry of Moduli Spaces, a Aarhus e per una “Junior Visiting Position” di un anno al Centro di Ricerca Matematica “Ennio De Giorgi”, a Pisa.

Pubblicazioni

Articoli pubblicati o accettati

- D. Alessandrini, *Geometric properties of logarithmic limit sets over the reals*, Oberwolfach Reports **4** (2007) 3286–3288.
- D. Alessandrini, *Tropicalization of group representations*, Algebraic & Geometric Topology **8** (2008) 279–307.
- D. Alessandrini, *Dequantization of real convex projective manifolds*, AMS Contemporary Mathematics **495** (2009) 61–84.
- D. Alesssandrini, A.Saracco, *Complete hyperbolicity in Lempert elliptic tubes*, accettato su International Journal of Mathematics.

Preprint

- D. Alessandrini, *Logarithmic limit sets of real semi-algebraic sets*, preprint arXiv:0707.0845.
- D. Alessandrini, *A compactification for the spaces of convex projective structures on manifolds*, preprint arXiv:0801.0165.
- D. Alessandrini, M. Nesci, *On the tropicalization of the Hilbert schemes*, preprint arXiv:0912.0082.
- D. Alesssandrini, L. Liu, A. Papadopoulos, W. Su, Z. Sun, *On Fenchel-Nielsen coordinates on Teichmüller spaces of surfaces of infinite type*, preprint arXiv:1003.0980.

Articoli in preparazione

- D. Alesssandrini, L. Liu, A. Papadopoulos, W. Su, *On the various Teichmüller spaces of a surface of infinite topological type*, versione preliminare.
- D. Alessandrini, *Compactification of parameter spaces in the Morgan-Shalen approach*, articolo di survey per "Handbook of Teichmüller Theory, vol. III", in preparazione.

Tesi

- D. Alessandrini, *Compattificazioni di varietà di caratteri e applicazioni topologiche*, Tesi di Laurea, 2003,
http://etd.adm.unipi.it/theses/available/etd-10112003-174635/.
- D. Alessandrini, *A tropical compactification for character spaces of convex projective structures*, Tesi di Perfezionamento (equivalente ad una Tesi di Dottorato), 2007.

Conferenze e seminari

Partecipazione a conferenze come invited speaker

5–11 Settembre 2005: Convegno "Classical and quantum gravity in 3 dimensions", Centro De Giorgi, Pisa. Titolo "Dequantization of Teichmüller spaces".
21–23 Settembre 2006: Convegno "Journée de Géométrie", I.R.M.A., Strasbourg. Titolo "Tropicalization of linear actions".
9–15 Dicembre 2007: Convegno "Tropical Geometry", MFO, Oberwolfach. Titolo "Logarithmic limit sets of real semi-algebraic sets".
27 Aprile – 2 Maggio 2009: Scuola "Master Class on Geometry", I.R.M.A., Strasbourg. Titolo "What is a complex projective structure ?"
12–16 Ottobre 2009: Convegno "Tropical Geometry in Combinatorics and Algebra", MSRI, Berkeley, CA. Titolo "Tropicalization of Teichmuller spaces".
9–13 Novembre 2009: Convegno "Geometrie, dynamique et representations des groupes", Luminy. Titolo "Compactification of the spaces of convex projective structures".
30 Novembre – 4 Dicembre 2009: Convegno "Tropical structures in geometry and physics", MSRI, Berkeley, CA. Titolo "On the compactification of the parameter space of convex projective structures".

Partecipatione a conferenze con comunicazione orale

22–26 Ottobre 2006: Convegno "Recent advances in complex and real geometry", Levico Terme. Titolo "Degeneration of convex projective structures on surfaces".
20–24 Ottobre 2008: Convegno "Progressi Recenti in Geometria Reale e Complessa", Levico Terme. Titolo "Complete hyperbolicity of Lempert's elliptic tubes".

Seminari

30 Maggio 2005: Titolo "Compactification of Teichmuller spaces from a tropical viewpoint" all'I.R.M.A., Strasbourg.
20 Aprile 2007: Titolo "Degeneration of convex projective structures on surfaces" all'Institut Fourier, Grenoble.
13 Ottobre 2008: Titolo "Complexification and tropicalization of convex real projective manifolds", all'IRMA, Strasbourg.
3 Novembre 2008: Titolo "Logarithmic limit sets and the compactification of the parameter space of convex projective structures", all'I.R.M.A., Strasbourg.
16 Novembre 2009: Titolo "Espaces de Teichmüller pour surfaces de type infini", all'I.R.M.A., Strasbourg. **9 Febbraio 2010:** Titolo "Spazi di Teichmüller per superfici di tipo infinito", al Dipartimento di Matematica, Università di Pisa.
10 Marzo 2010: Titolo "On the tropicalization of the Hilbert scheme", al Mathematics Institute, University of Warwick.

11 Marzo 2010: Titolo "On the compactification of Teichmuller-like parameter spaces", al Mathematics Institute, University of Warwick.
30 Marzo 2010: Titolo "Sur la compactification des espaces de paramètres de type de Teichmüller" all'Institut de mathématiques de Jussieu, Parigi.
31 Marzo 2010: Titolo "Tropicalization du schéma de Hilbert" all'Institut de mathématiques de Jussieu, Parigi.
29 Aprile 2010: Titolo "Sur les espaces de Teichmüller des surfaces de type infini", all'Institut Fourier, Grenoble.

Partecipatione a conferenze senza comunicazione orale

1–4 Giugno 2004: Convegno "Journees GDR Tresses", Autrans.
27 Settembre – 1º Ottobre 2004: Convegno "Recent advances in complex and real geometry", Levico Terme.
23–27 Febbraio 2005: "Workshop on 3-manifolds and complexity", Cortona.
17–25 Maggio 2005: Scuola "Topologie des variétés algébriques réelles", I.R.M.A., Strasbourg.
26–28 Maggio 2005: Convegno "76ème Rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens", I.R.M.A., Strasbourg.
6–24 Giugno 2005: "Summer School and Conference on Geometry and Topology of 3-Manifolds", ICTP, Trieste.
3–13 Luglio 2006: "Ecole d'été en Géométrie Tropicale", Institut Jussieu, Paris.
10–15 Settembre 2007: "School on the Geometry of Special Varieties", Trento.
17–19 Settembre 2007: Convegno "Journée ANR sur la Conjecture du Volume", I.R.M.A., Strasbourg.
1–7 Giugno 2008: Convegno "ULTRAMATH2008 – Ultrafilters and Ultraproducts in Mathematics", Pisa.
1–5 Giugno 2009: Convegno "Des groupes tresses aux espaces de Teichmüller", Luminy.
11–13 Giugno 2009: Convegno "83ème rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens : Théorie des représentations en mathématique et en physique", I.R.M.A., Strasbourg.
17 Giugno 2009: Séminaire Genève-Paris-Strasbourg "Géométrie tropicale", Strasbourg.
10–12 Settembre 2009: Convegno "84ème rencontre entre physiciens théoriciens et mathématiciens : Topologie quantique et théorie de Chern-Simons", I.R.M.A., Strasbourg. **25 Febbraio 2010:** Séminaire Genève-Paris-Strasbourg "Géométrie tropicale", Parigi.
14 Aprile 2010: Séminaire Genève-Paris-Strasbourg "Géométrie tropicale", Strasbourg.
28 Giugno – 3 Luglio 2010: Convegno "Teichmüller Theory and its Interactions in Mathematics and Physics", Centre de Recerca Matemàtica, Bellaterra, Spagna.

Programma di ricerca

Interpretazione geometrica delle azioni del gruppo fondamentale di una varietà su un complessso

Nella mia tesi di perfezionamento (equivalente ad una tesi di dottorato) ho costruito una compattificazione per lo spazio di parametri, di tipo Teichmüller, di strutture proiettive reali convesse su una n-varietà chiusa M con gruppo fondamentale Gromov-iperbolico. Ho mostrato che questi spazi di parametri possono essere identificati in modo naturale con insiemi semi-algebrici reali e ho costruito il bordo come una tropicalizzazione (in un senso appropriato) dell'insieme semi-algebrico. Se si applica la stessa costruzione agli ordinari spazi di Teichmüller di superfici di Riemann, il bordo costruito in questo modo coincide con il bordo di Thurston, quindi questa costruzione può essere vista come una generalizzazione della compattificazione di Thurston agli spazi di strutture proiettive reali convesse.

Ho dato una interpretazione ai punti del bordo come spettri marcati di azioni di $\pi_1(M)$ su dei complessi di Bruhat-Tits di dimensione n. Lo spettro è definito usando una distanza differente dalla distanza che viene solitamente considerata sui complessi. Per definirla ho messo una struttura di spazio proiettivo tropicale sul complessso, e ho definito la distanza come un analogo tropicale della distanza di Hilbert, una distanza sui sottoinsiemi convessi dello spazio proiettivo reale. Ho mostrato che se una successione di strutture proiettive reali convesse converge ad un punto di bordo, gli spettri marcati delle strutture proiettive reali convesse convergono proiettivamente allo spettro marcato dell'azione associata al punto di bordo.

Questa interpretazione dei punti di bordo generalizza l'interpretazione data da Morgan e Shalen nel caso dello spazio di Teichmüller ordinario. In questo caso hanno usato spettri marcati di azioni del gruppo fondamentale su alberi reali. Hanno anche mostrato che c'è una dualità fra (opportune) azioni del gruppo fondamentale di una varietà su alberi reali e (opportune) laminazioni misurate di codimensione 1 sulla varietà.

Vorrei capire se è possibile generalizzare quasta dualità nel caso di azioni del gruppo fondamentale della varietà su complessi di dimensione più grande di 1, e capire quali sono gli oggetti duali, oggetti che generalizzerebbero le laminazioni misurate in un senso oppurtuno. Il primo caso che vorrei considerare è il caso in cui la varietà è una superficie iperbolica chiusa, il complesso ha dimensione 2, e l'azione è data da un punto di bordo per lo spazio di parametri delle strutture proiettive reali convesse sulla superficie.

Spazi di Teichmüller per superfici di tipo infinito (in collaborazione con A. Papadopoulos)

In un primo lavoro (in collaborazione con L. Liu, A. Papadopoulos, W. Su, Z. Sun) abbiamo studiato lo spazio di Teichmüller spaces di superfici di tipo infinito usando lo strumento geometrico della decomposizione in pantaloni. Abbiamo confrontato la topologia indotta dalla distanza di Teichmüller, la topologia indotta dalla distanza "length spectrum", e la topologia indotta considerando la distanza ℓ^∞ sulle coordinate di Fenchel-Nielsen associate ad una decomposizione in pantaloni fissata. Diversamente dal caso di tipo finito, dove queste topologie coincidono, nel caso di tipo infinito ci sono casi in cui sono differenti. Abbiamo trovato alcune ipotesi sulla superficie di base dello spazio di Teichmüller, che assicurano che alcune di queste topologie coincidono. Se le lunghezze delle curve di una decomposizione in pantaloni sono limitate dall'alto, abbiamo mostrato che la topologia indotta dalla distanza di Teichmüller coincide con la topologia definita dalle coordinate di Fenchel-Nielsen. In questo caso abbiamo un omeomorfismo fra lo spazio di Teichmüller space e lo spazio ℓ^∞ che è localmente bi-Lipshitz. Se le lunghezze delle curve della decomposizione in pantaloni sono anche limitate dal basso, abbiamo che la topologia indotta dalla distanza "length spectrum" è anch'essa equivalente alle altre, e in questo caso mostriamo anche che la distanza "length spectrum" è completa. Questi risultati sono contenuti in un articolo, ora in forma di preprint.

In un prossimo lavoro (con A. Papadopoulos) progettiamo di studiare gli spazi di Teichmüller di superfici di tipo infinito usando un'altro strumento geometrico, le triangolazioni ideali. Il primo problema da risolvere è di dimostrare che le superfici iperboliche di tipo infinito ammettono abbastanza triangolazioni ideali. Poi vogliamo usare queste triangolazioni ideali per definire una topologia sullo spazio di Teichmüller usando la distanza ℓ^∞ sulle cosidette "shear coordinates". Vogliamo poi confrontare questa topologia alle altre topologie che conosciamo sugli spazi di Teichmüller cercando condizioni in cui coincidono.

Spazi di parametri di strutture proiettive complesse sulle superfici

Se S è una superficie iperbolica (con caratteristica di Eulero negativa, o di tipo infinito), ho definito una distanza sullo spazio di parametri di tipo Teichmüller di strutture proiettive complesse su S (strutture geometriche modellate su $(\mathbb{CP}^1, PGL_2(\mathbb{C}))$).

Supponiamo che Z e W sono due strutture proiettive complesse su S.

Teorema 1. *Se $f : Z \mapsto W$ è una isometria per la distanza di Thurston, allora f è un isomorphismo proiettivo.*

Teorema 2. *Se $f : Z \mapsto W$ è una funzione bi-lipschitz isotopa all'identità, allora c'è una funzione bi-lipschitz $g : Z \mapsto W$, isotopa all'identità, con costante bi-lipschitz minimale.*

Ho definito la distanza fra Z e W come la costante bi-lipschitz minimale di una funzione bi-lipschitz $g : Z \mapsto W$ isotopa all'identità. I risultati precedenti mostrano che questa è una distanza.

Vorrei confrontare la topologia indotta da questa distanza con altre topologie costruite usando la tecnica del grafting, gli spazi di Teichmüller e gli spazi di laminazioni geodetiche misurate.

Complessificazione di varietà proiettive reali convesse (in collaborazione con A. Saracco, Parma)

Se Ω è un sottoinsieme aperto dello spazio proiettivo $\mathbb{RP}^n$, il Tubo di Lempert Ω^e è l'unione, nello spazio proiettivo $\mathbb{CP}^n$ di tutti i dischi tondi di dimensione complessa 1 che sono invarianti per coniugazione complessa e tali che la loro parte reale sia contenuta in Ω. Ω^e è un aperto di $\mathbb{CP}^n$ e, se Ω è propriamente convesso, Ω^e è iperbolico nel senso di Kobayashi, e la restrizione della distanza di Kobayashi di Ω^e al sottoinsieme Ω è la distanza di Hilbert di Ω. Lempert ha mostrato che se Ω è propriamente convesso, Ω^e è linearmente convesso. Noi abbiamo rafforzato questi risultati nel modo seguente:

Teorema 3. *Se Ω è un sottoinsieme aperto e propriamente convesso di $\mathbb{RP}^n$, allora il tubo di Lempert Ω^e è un aperto $\mathbb{C}$-convsso, e la distanza di Kobayashi di Ω^e è completa.*

Una varietà proiettiva reale convessa è il quoziente Ω/Γ di un aperto propriamente convesso Ω per l'azione di un sottogruppo Γ di $PGL_{n+1}(\mathbb{R})$ che agisce propriamente e liberamente su Ω. Le varietà proiettive convesse hannno una struttura geometrica modellata su $(\mathbb{RP}^n, PGL_{n+1}(\mathbb{R}))$. Noi abbiamo mostrato:

Teorema 4. *Γ agisce propriamente e liberamente su Ω^e, e il quoziente Ω^e/Γ è una varietà omeomorfa al fibrato tangente a Ω/Γ. Questa varietà ha una struttura geometrica modellata su $(\mathbb{CP}^n, PGL_{n+1}(\mathbb{C}))$. La sua struttura complessa è iperbolica nel senso di Kobayashi, e la metrica di Kobayashi è completa.*

Questi risultati sono contenuti in un articolo che apparirà su International Journal of Mathematics. Vogliamo anche mostrare la congettura seguente, già dimostrata da Lempert nel caso particolare di un ellissoide:

Congettura 5. *Se Ω è strettamente convesso e Ω/Γ è compatto, Ω^e/Γ è una varietà di Stein.*

Tropicalizzazione dello Schema di Hilbert (in collaborazione con M. Nesci, Ginevra)

Dato un polinomio p, $H^p_{\mathbb{P}^n}$ è lo schema di Hilbert di p. Scegliamo un campo $\mathbb{K}$ algebricamente chiuso con una valutazione reale surgettiva. $H^p_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{K})$ è lo spazio dei parametri dei sottoschemi di $\mathbb{KP}^n$ con polinomio di Hilbert p: se $x \in H^p_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{K})$ denotiamo con V_x il sottochema di $\mathbb{KP}^n$ corrispondente. C'è una immersione proiettiva naturale $H^p_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{K}) \subset \mathbb{KP}^N$. Consideriamo la tropicalizzazione di $H^p_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{K})$, $\tau : H^p_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{K}) \mapsto TH^p_{\mathbb{P}^n}$, una varietà proiettiva tropicale. Abbiamo dimostrato il seguente teorema:

Teorema 6. *Se due punti $x, y \in H^p_{\mathbb{P}^n}(\mathbb{K})$ hanno la stessa immagine in $TH^p_{\mathbb{P}^n}$, allora le varietà proiettive corrispondenti V_x e V_y hanno la stessa tropicalizzazione.*

La dimostrazione è basata sul risultato seguente:

Teorema 7. *Se $I \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ è un ideale omogeneo saturo con polinomio di Hilbert $p = \sum_{i=0}^{s} \binom{x+i}{i+1} - \binom{x+i-m_i}{i+1}$ (espansione di Hartshorne), allora I ammette una base tropicale formata da polinomi di grado minore o uguale a m_0.*

Questo risultato da una corrispondenza naturale surgettiva fra i punti della varietà tropicale $TH^p_{\mathbb{P}^n}$ e l'insieme delle tropicalizzazioni dei sottoschemi di $\mathbb{KP}^n$ con polinomio di Hilbert p. Questa corrispondenza non è, in generale, iniettiva.

Abbiamo poi studiato alcuni esempi nel caso di ipersuperfici in $\mathbb{P}^n$ e nel caso di schemi di Hilbert di varietà di dimensione zero in $\mathbb{P}^2$. Questi risultati sono contenuti in un articolo, ora in forma di preprint.

Negli esempi abbiamo visto due diversi motivi per cui la corrispondenza non è iniettiva. Un motivo è analogo a quel che accade nella geometria algebrica reale, dove gli spazi di parametri sono degli insiemi semi-algebrici: nel caso tropicale bisogna considerare un sottopoliedro di $TH^p_{\mathbb{P}^n}$ per sperare di avere una parametrizzazione iniettiva. L'altro motivo è che la tropicalizzazione di un sottoschema V di $\mathbb{KP}^n$ trascura la struttura di schema di V. Per sperare di avere una parametrizzazione iniettiva bisogna dare una nozione più fine di tropicalizzazione. Queste idee meritano un ulteriore studio.