CURRICULUM VITAE

Jasmin Raissy

Dati Personali: data e luogo di nascita: 20 maggio 1982, Pisa
cittadinanza: italiana
residenza: via Fiorentina, 211, 56121, Pisa
telefono ufficio: +39 02 6448 5773
fax: +39 02 6448 5705
indirizzo e-mail: `jasmin.raissy@unimib.it`
web: `www.matapp.unimib.it/~raissy`
`www.dm.unipi.it/~raissy`

posizione attuale: assegnista di ricerca presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università degli Studi di Milano Bicocca

Posizioni

2010 Da Gennaio, titolare di un assegno di ricerca biennale rinnovabile per la tematica "Geometria e topologia delle varietà reali e complesse", nel settore MAT/03 Geometria, presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università degli Studi di Milano Bicocca.

Formazione

2001 Diploma di maturità scientifica presso il Liceo Scientifico "Ulisse Dini" di Pisa con votazione 100/100.

Iscritta al corso di laurea triennale in Matematica presso l'Università di Pisa da ottobre 2001 a settembre 2004.

2004 Laurea Triennale in Matematica presso l'Università di Pisa in data 29 settembre 2004; relatore Prof. Marco Abate; titolo della tesi: "Dinamica olomorfa nell'intorno di un punto parabolico".

Iscritta al corso di laurea specialistica in Matematica presso l'Università di Pisa da ottobre 2004 a luglio 2006.

2006 Laurea Specialistica in Matematica presso l'Università di Pisa in data 21 luglio 2006, con votazione 110/110 e lode; relatore Prof. Marco Abate; titolo della tesi: "Normalizzazione di campi vettoriali olomorfi".

Vincitrice di un posto con borsa per il corso di Dottorato in Matematica (XXII ciclo) presso il Dipartimento di Matematica "Leonida Tonelli" dell'Università di Pisa.

2007 Da gennaio 2001 a febbraio 2010, dottoranda in Matematica (XXII ciclo) presso il Dipartimento di Matematica "Leonida Tonelli" dell'Università di Pisa.

2010 Dottorato di Ricerca in Matematica presso l'Università di Pisa, Scuola di Dottorato in Scienze di Base Galileo Galilei in data 26/02/2010, con giudizio ECCELLENTE; relatore Prof. Marco Abate; titolo della tesi: "Geometrical methods in the normalization of germs of biholomorphisms".

Borse di studio

2007 Dal 01/01/2007 al 31/12/2009 Borsa di dottorato dell'Università di Pisa.

2008 Dal 15/05/2008 al 14/06/2008 Fellowship presso Institut Mittag-Leffler per il programma "Complex analysis of several variables".

Attività organizzativa

2010 Da Marzo 2010 organizzatrice, assieme a Ana Primo Ramos (Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Milano Bicocca), dei Seminari degli Assegnisti del Dipartimento di Matematica e Applicazioni.

Altri incarichi

2007 Dal 01/11/2007 fino al 31/10/2009 sono stata rappresentante dei dottorandi nel consiglio di dottorato in Matematica.

2008 Dal 01/01/2008 (fino al 31/12/2009) sono rappresentante dei rappresentanti dei dottorandi in consiglio della Scuola di dottorato "Galileo Galilei".

Conferenze tenute

2007 – Marzo: "Linearization of holomorphic germs with quasi-elliptic fixed points", presso il Centro di Ricerca Matematica "Ennio de Giorgi", Pisa (26/03/2007).

– Dicembre: "Linearization of holomorphic germs with quasi-Brjuno fixed points", presso Department of Mathematics and Statistics of the University of Cyprus, Nicosia (Cyprus) (20/12/2007).

2008 – Febbraio: "Linearizzazione di germi olomorfi con punti fissi di tipo quasi-Brjuno", presso Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma, Parma (13/02/2008).

– Giugno: "Linearization in presence of resonances", presso l'Institut Mittag-Leffler, Djursholm (Stockholm), seminario del programma "Complex analysis of several variables", Djursholm (Stockholm), (10/06/2008).

– Ottobre: "Linearization in presence of resonances", invited speaker al convegno "Progressi Recenti in Geometria Reale e Complessa", Levico Terme (Trento), (21/10/2008).

– Novembre: "Linearizzazione in presenza di risonanze", presso Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma Tor Vergata, Roma (18/11/2008).

2009 – Marzo: "Simultaneous linearization in presence of resonances", presso Mathematics Department of the University of Michigan, Ann Arbor, Michigan (USA) (09/03/2009).

– Maggio: "Actions de tore dans le problème de la normalisation", presso Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, Paris (15/05/2009).

– Luglio: "Torus actions in the normalization problem", presso il C.I.R.M. di Luminy (Marsiglia) Francia, speaker al convegno "International conference in complex analysis", Luminy (Marsiglia) Francia, (14/07/2009).

– Ottobre: “Torus actions in the normalization problem”, presso il Centro di Ricerca Matematica “Ennio de Giorgi” di Pisa, invited speaker del convegno “Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation”, Pisa (16/10/2009).

2010 – Gennaio: “Torus actions in the normalization problem”, speaker del “Workshop in Complex Analysis and Geometry”, Albi (Francia) (30/01/2010).

– Febbraio: “Torus actions in the normalization problem”, presso il Korteweg-de Vries Institute for Mathematics (Faculty NWI), University of Amsterdam, (16/02/2010).

– Marzo: “Azioni di toro nel problema della normalizzazione”, presso Dipartimento di Matematica dell'Università di Roma Tor Vergata, Roma (16/03/2010).

– Marzo: “Azioni di toro nel problema della normalizzazione”, presso Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università degli Studi di Milano Bicocca, Milano (25/03/2010).

– Giugno: “Geometrical methods in the normalization problem”, speaker al convegno “CR Geometry and PDE's - IV”, Levico Terme (Trento), (03/06/2010).

Partecipazione a convegni e scuole

2005 – Agosto: Corso Estivo di Matematica della Scuola Matematica Interuniversitaria tenutosi a Perugia dal 1 agosto al 2 settembre; corso di Analisi Complessa tenuto dal Prof. Morris Kalka e corso di Geometria Algebrica tenuto dal Prof. Philippe Ellia.

2007 – Gennaio: workshop “Local Holomorphic Dynamics” tenutosi presso il Centro di Ricerca Matematica “Ennio de Giorgi” di Pisa, nella settimana 22–26 gennaio 2007.

– Aprile–Luglio: periodo intensivo di ricerca “Dynamical Systems and Number Theory” tenutosi presso il Centro di Ricerca Matematica “Ennio de Giorgi” di Pisa, dal 16 aprile al 13 luglio 2007.

– Giugno–Luglio: Scuola Estiva “Homogeneous flows, moduli spaces, and arithmetic” organizzata dal Clay Mathematics Institute presso il Centro di Ricerca Matematica “Ennio De Giorgi” di Pisa, dal 11 giugno al 6 luglio 2007.

– Maggio: “Rigidity in dynamics and geometry” tenutosi presso il C.I.R.M. di Luminy (Marsiglia) Francia, nella settimana 21–25 maggio 2007.

– Maggio: “Complex Analysis and Geometry XVIII” convegno organizzato dal C.I.R.M. di Trento, tenutosi a Levico, nella settimana dal 28 maggio al 1 giugno 2007.

– Giugno: “Joint International Meeting UMI-DMV” tenutosi a Perugia nella settimana 18–22 giugno 2007.

2008 – Gennaio: scuola “UK Dynamical Systems Graduate School on Complex Dynamics”, tenutasi presso University of Liverpool, nella settimana 14–18 gennaio 2008.

– Maggio: “Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology”, tenutasi presso Stockholm University, nella settimana 19–25 maggio 2008.

– Luglio: Scuola Estiva “Holomorphic Dynamical Systems” organizzata dalla Fondazione CIME “Roberto Conti” tenutosi presso Cetraro (Cosenza), dal 7 al 12 luglio 2008.

– Settembre: Workshop INdAM “Holomorphic Iteration, Semigroups, and Loewner Chains” tenutosi presso Istituto Nazionale di Alta Matematica, Università di Roma La Sapienza, dal 9 al 12 settembre 2008.

- Ottobre: "Calcul moulien, Résurgence, Resommation" tenutosi presso Laboratoire J.A. Dieudonné, CNRS et Université de Nice "Sophia Antipolis", dal 15 al 17 ottobre 2008.
- Ottobre: "Progressi Recenti in Geometria Reale e Complessa" convegno organizzato dal C.I.R.M. di Trento, tenutosi al Grand Hotel Bellavista di Levico Terme (Trento), nella settimana dal 20 al 24 ottobre 2008 **(invited speaker)**.

2009 – Febbraio: "Calcul Moulien, Renormalisation et Algèbres de Hopf" tenutosi presso Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, Paris, dal 5 al 6 febbraio 2009.
- Marzo: Workshop "Multivariable Complex Dynamics", tenutosi presso il Banff International Research Station for Mathematical Innovation and Discovery (BIRS), Banff Centre in Banff (Alberta, Canada), nella settimana 1–6 marzo 2009.
- Giugno: "Complex Analysis and Geometry XIX" convegno organizzato dal C.I.R.M. di Trento, tenutosi a Levico, nella settimana 1–5 giugno 2009.
- Giugno: "Dynamics and Complex Geometry II" tenutosi presso il C.I.R.M. di Luminy (Marsiglia) Francia, nella settimana 15–19 giugno 2009.
- Luglio: "International conference in complex analysis" tenutosi presso il C.I.R.M. di Luminy (Marsiglia) Francia, nella settimana 13–17 luglio 2009 **(speaker)**.
- Ottobre: "Midwest Several Complex Variables Conference" tenutosi presso il Purdue University West Lafayette, IN (USA), dal 10 al 12 ottobre, 2009.
- Ottobre: "Asymptotics in dynamics, geometry and PDEs; generalized Borel summation" tenutosi presso il Centro di Ricerca Matematica "Ennio de Giorgi" di Pisa, nella settimana 12–16 ottobre 2009 **(invited speaker)**.

2010 – Gennaio: "Winter school in Complex Analysis and Geometry", tenutasi presso l'Institut de Mathématiques de Toulouse (Francia), nella settimana 25–29 gennaio 2010.
- Gennaio: "Workshop in Complex Analysis and Geometry", tenutosi presso il Grand Hôtel d'Orléans di Albi, dal 29 al 31 gennaio 2010 **(speaker)**.
- Maggio: Workshop "Geometria in Bicocca", tenutosi presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università degli Studi di Milano Bicocca, dal 6 al 7 maggio 2010.
- Giugno: "CR Geometry and PDE's - IV", convegno organizzato dal C.I.R.M. di Trento, tenutosi a Levico, nella settimana 6–11 giugno 2010 **(speaker)**.

Soggiorni all'estero

2007 – Department of Mathematics and Statistics of the University of Cyprus, Nicosia, dal 16/12/2007 al 23/12/2007.

2008 – Institut Mittag-Leffler, Djursholm (Stockholm), dal 15/05/2008 al 14/06/2008, durante il programma "Complex analysis of several variables".

2009 – Département de Mathématiques de la Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud 11, Paris, dal 12/01/2009 al 14/06/2009.
- Mathematics Department of the University of Michigan, Ann Arbor, Michigan (USA) dal 8/03/2009 al 15/03/2009.

– Institut de Recherche Mathématique Avancé, Université de Strasbourg, Strasbourg, dal 8/06/2009 al 10/06/2009.

2010 – Korteweg-de Vries Institute for Mathematics (Faculty NWI), University of Amsterdam, Amsterdam, dal 15/02/2010 al 21/02/2010.

Attività didattica

2007 – Responsabile del Precorso di Matematica per i corsi di Laurea Triennale in Chimica e Scienze e tecnologie chimiche per l'industria e l'ambiente dell'Università di Pisa, 17–21 settembre 2007.

– Responsabile del Precorso di Matematica per il corso di Laurea di Scienze biologiche molecolari (gruppo 2) dell'Università di Pisa, 24–28 settembre 2007.

2008 – II semestre A.A. 2007/2008: Esercitazioni per il corso di ALGEBRA-B del corso di Laurea Triennale in Informatica dell'Università di Pisa.

– Partecipante al corso di lettura sulla Dinamica locale delle foliazioni olomorfe singolari tenutosi durante l'A.A. 2007/2008 presso il Dipartimento di Matematica "L. Tonelli" a cura del prof. M. Abate, il cui contenuto è stato pubblicato in [CNRR].

– Responsabile del Precorso di Matematica per i corsi di Laurea Triennale in Chimica e Scienze e tecnologie chimiche per l'industria e l'ambiente dell'Università di Pisa, 15–19 settembre 2008.

– Responsabile del Precorso di Matematica per il corso di Laurea di Scienze biologiche molecolari (gruppo 2) dell'Università di Pisa, 22–26 settembre 2008.

2009 – Responsabile del Precorso di Matematica per i corsi di Laurea Triennale in Chimica e Scienze e tecnologie chimiche per l'industria e l'ambiente dell'Università di Pisa, 14–18 settembre 2009.

– Responsabile del Precorso di Matematica per il corso di Laurea di Scienze biologiche molecolari dell'Università di Pisa, 21–25 settembre 2009.

– I semestre A.A. 2009/2010: Supporto alla didattica per il corso di Aritmetica del corso di Laurea Triennale in Matematica dell'Università di Pisa.

Altre attività

2005 Tutor nella "Settimana Matematica" 2005, organizzata dal Dipartimento di Matematica e dal Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Pisa.

2006 Tutor per il Laboratorio "Giochi di Lego" nell'ambito della "Settimana Matematica", 7–10 Febbario 2006, organizzata dal Dipartimento di Matematica e dal Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Pisa, all'interno del Progetto Lauree Scientifiche.

2007 Tutor per il Laboratorio "Giochi di Lego" nell'ambito della "Settimana Matematica", 5–8 Febbraio 2007, organizzata dal Dipartimento di Matematica e dal Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Pisa, all'interno del Progetto Lauree Scientifiche.

2008 Collaboratrice alla "Settimana Matematica", 4–8 Febbraio 2008, organizzata dal Dipartimento di Matematica e dal Corso di Laurea in Matematica dell'Università di Pisa, all'interno del Progetto Lauree Scientifiche.

Attività di Ricerca

La mia attività di ricerca si svolge nell'ambito dei *Sistemi dinamici olomorfi*, ed in particolare è rivolta allo *studio di forme normali olomorfe e del problema della linearizzazione di germi di biolomorfismi di* $\mathbb{C}^n$*, con* $n \geq 2$.

Ho iniziato la mia attività di ricerca durante il mio lavoro di tesi di Laurea specialistica, sotto la supervisione del Prof. Marco Abate, studiando la normalizzazione di germi di campi vettoriali olomorfi in $\mathbb{C}^n$ con un punto singolare nell'origine. Durante il dottorato, sempre sotto la supervisione del Prof. Marco Abate, mi sono invece concentrata su problemi riguardanti la dinamica discreta, ed in particolare, sul problema della linearizzazione e della normalizzazione olomorfa di germi di biolomorfismi di $\mathbb{C}^n$.

1. Forme normali di campi vettoriali.

Nella mia tesi di Laurea Specialistica, [R1], ho studiato gli aspetti algebrici, formali e olomorfi della normalizzazione di germi di campi vettoriali olomorfi in un punto singolare. Anzitutto ho sistematizzato i risultati classici sulla normalizzazione formale. A tale fine ho trovato una generalizzazione della forma normale di Jordan di un tipo di endomorfismi di algebre di Lie di dimensione infinita. Tale risultato si applica ai campi vettoriali formali con un punto singolare, e pertanto si può parlare di forma normale di Jordan di un campo vettoriale formale. Quindi mi sono occupata della relazione che intercorre tra la forma normale di Jordan e la forma normale di Poincaré-Dulac di un campo vettorale formale. La forma normale di Poincaré-Dulac di un campo vettoriale formale (vedi [Ar] pp. 177–188) si discosta dall'usuale nozione di forma normale in quanto non è unica; la sua classificazione come forma normale prende corpo quando collegata alla forma normale di Jordan di un campo vettoriale. In letteratura l'unico breve accenno a tale legame si trova in [Ar] pp. 183–184. In [R1] ho fornito una dimostrazione del Teorema di Poincaré-Dulac, diversa da quella che si trova usualmente in letteratura, che evidenzia il legame fra le due forme normali, come voluto.

2. Forme normali di biolomorfismi.

Background

Dato un germe di biolomorfismo f di $\mathbb{C}^n$ in un punto fisso p, si vuole studiare la dinamica di f vicino al punto fisso, ossia, per ogni punto q in un intorno (sufficientemente) piccolo di p, si è interessati a descrivere il comportamento asintotico della successione $\{f^k(q)\}_{k\geq 0}$ delle iterate di f valutate nel punto q, dove f^k è la composizione di f con se stessa per k volte. Poiché tale problema è invariante a meno di traslazioni, è sempre possibile ridursi allo studio di germi di biolomorfismi di $(\mathbb{C}^n, O)$ che fissano l'origine.

Sebbene il caso unidimensionale sia ampiamente sviluppato, in dimensione $n \geq 2$ tale studio è lontano dall'essere completo. Localmente, f può essere scritta come una n-upla di serie di potenze convergenti, cioè, usando la notazione multi-indiciale standard, si ha

$$f(z) = \Lambda z + \sum_{\substack{Q \in \mathbb{N}^n \\ |Q| \geq 2}} f_Q z^Q,$$

dove Λ è una matrice $n \times n$ a coefficienti complessi, $f_Q \in \mathbb{C}^n$, e, posto $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, allora $|Q| := \sum_{j=1}^n q_j$ e $z^Q := z_1^{q_1} \cdots z_n^{q_n}$. A meno di cambiamenti lineari delle coordinate, è anche possibile supporre che Λ sia in forma normale di Jordan, ossia

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ \varepsilon_2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \varepsilon_n & \lambda_n \end{pmatrix},$$

dove gli autovalori $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}^*$ non sono necessariamente distinti, e $\varepsilon_j \in \{0, \varepsilon\}$ può essere non nullo solo se $\lambda_{j-1} = \lambda_j$.

La dinamica non cambia se cambiamo coordinate, perciò un'idea naturale è cercare una soluzione ad un cosiddetto problema di normalizzazione: *dato un germe di biolomorfismo f di $\mathbb{C}^n$ che fissa l'origine e con parte lineare in forma normale di Jordan, è possibile trovare un cambio di coordinate locale φ di $\mathbb{C}^n$, che fissi l'origine, tale che*

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = \text{“forma semplice”?}$$

Una risposta positiva a tale problema, ridurrebbe lo studio della dinamica di f allo studio ben più semplice della dinamica della "forma semplice". Inoltre, si è soliti supporre $\mathrm{d}\varphi_O = \mathrm{Id}$ in quanto la parte lineare di f è già in forma normale (di Jordan).

Naturalmente, dobbiamo specificare cosa intendiamo per "forma semplice". Una scelta naturale per una "forma semplice" è il termine lineare del germe; in questo caso studiamo il:

Problema della linearizzazione. *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che fissa l'origine e con parte lineare Λ in forma normale di Jordan. Esiste un cambio locale di coordinate olomorfo φ di $\mathbb{C}^n$, che fissi l'origine, con $\mathrm{d}\varphi_O = \mathrm{Id}$, tale che $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi = \Lambda$?*

Un modo per risolvere tale problema è prima cercare una trasformazione formale φ che risolva

$$f \circ \varphi = \varphi \circ \Lambda,$$

e poi studiarne la convergenza o meno.

La risposta a tale problema dipende dall'insieme degli autovalori di Λ, solitamente chiamato lo *spettro* di Λ. Infatti è possibile che esista un multi-indice $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n$, con $|Q| \geq 2$, tale che

$$\lambda^Q - \lambda_j := \lambda_1^{q_1} \cdots \lambda_n^{q_n} - \lambda_j = 0$$

per qualche $1 \leq j \leq n$; una relazione di questo tipo è detta *risonanza moltiplicativa* di f, e Q è detto un *multi-indice risonante*. Un *monomio risonante* è un monomio z^Q nella j-esima coordinata tale che $\lambda^Q = \lambda_j$.

Le risonanze costituiscono l'ostruzione formale alla linearizzazione. Infatti, si ha il seguente risultato classico:

Teorema. (Poincaré, 1893 [P]; Dulac, 1904 [D]) *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che fissa l'origine O con parte lineare Λ in forma normale di Jordan. Allora esiste una trasformazione formale φ di $\mathbb{C}^n$, priva di termine costante e con parte lineare uguale all'identità, che coniuga f ad una trasformazione formale $g \in \mathbb{C}[\![z_1, \dots, z_n]\!]^n$ priva di termine costante, con parte lineare Λ e contenente solo monomi risonanti.*

Una serie formale g priva di termine costante, con parte lineare in forma normale di Jordan e contenente solo monomi risonanti rispetto agli autovalori della sua parte lineare, è detta in *forma normale di Poincaré-Dulac*. Una serie formale g in forma normale di Poincaré-Dulac che sia formalmente coniugata ad un germe di biolomorfismo f di $\mathbb{C}^n$ che fissi l'origine è detta una *forma normale (formale) di Poincaré-Dulac associata a f*. Quindi la seconda scelta naturale per una "forma semplice" è una forma normale di Poincaré-Dulac, per cui abbiamo il:

Problema della normalizzazione. *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che fissa l'origine e con parte lineare Λ in forma normale di Jordan. Esiste un cambio locale di coordinate olomorfo φ di $\mathbb{C}^n$, che fissi l'origine, con $\mathrm{d}\varphi_O = \mathrm{Id}$, tale che $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ sia una forma normale di Poincaré-Dulac di f?*

Anche in assenza di risonanze, la linearizzazione olomorfa non è garantita. È infatti necessario studiare il modo in cui i numeri $\lambda^Q - \lambda_j$ si avvicinano a zero per $|Q| \to +\infty$; in questo contesto, questo problema è noto come *problema dei piccoli divisori.* Inoltre in generale le forme normali di Poincaré-Dulac non sono uniche, e ciò rende particolarmente difficile lo studio della convergenza.

Il problema della linearizzazione in dimensione 1 è stato ampiamente studiato, ed essenzialmente risolto, da Yoccoz [Y1–2] fra il 1988 ed il 1995. Il risultato migliore in più variabili in assenza di risonanze è dovuto a Brjuno [Br] nel 1972, che fornisce una condizione sufficiente (ma non si sa se necessaria) per la convergenza della linearizzazione. Altri risultati di linearizzazione parziale sono dovuti a Pöschel [Pö] nel 1986, Nishimura [N] nel 1983 ed altri, mentre risultati recenti di linearizzazione in presenza di risonanze sono stati ottenuti da Pérez-Marco [PM] nel 2001 e Rong [Ro] nel 2008.

Il problema della normalizzazione olomorfa è invece molto più aperto; ci sono risultati nel caso parallelo dei sistemi dinamici continui, ossia dei germi di campi vettoriali olomorfi con una singolarità all'origine, dovuti a Brjuno [Br] e più recentemente, nel 2005, a Zung [Zu1–2], ed alcuni risultati dovuti a Écalle (vedi [ÉS], [ÉV]) riguardanti la teoria degli invarianti olomorfi.

Risultati ottenuti

Nei miei lavori completati durante il dottorato in Matematica presso l'Università di Pisa, sotto la supervisione del Prof. Marco Abate, e durante il mio soggiorno di un semestre presso il Départment de Mathématiques de la Faculté des Sciences d'Orsay, Université Paris-Sud, ho studiato il problema della linearizzazione olomorfa in presenza di risonanze ([R2–3, 6]), ed ho introdotto dei nuovi metodi geometrici nello studio del problema della normalizzazione olomorfa ([R4]).

Linearizzazione olomorfa. Riguardo il problema della linearizzazione in presenza di risonanze, in [R2] ho dimostrato che, dato un germe di biolomorfismo f di $\mathbb{C}^n$ che fissi l'origine e che abbia parte lineare diagonalizzabile, sotto opportune condizioni aritmetiche sugli autovalori di $\mathrm{d}f_O$ ed alcune restrizioni sul tipo di risonanze (che però possono essere presenti), una condizione necessaria e sufficiente per la linearizzazione olomorfa in presenza di risonanze è l'esistenza di una particolare varietà complessa f-invariante (vedi [R2] per definizioni e dimostrazioni):

Teorema 1. (Raissy, 2009 [R2]) *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che abbia l'origine come punto fisso quasi-Brjuno di ordine s, con $1 \leq s \leq n$. Allora f è olomorficamente linearizzabile se e solo se ammette una varietà M di codimensione s tale che $f|_M$ sia olomorficamente linearizzabile.*

Tale risultato ha inoltre come corollari molti dei risultati classici di linearizzazione e anche alcuni risultati più recenti.

Ho poi esplorato in questo setting le conseguenze del principio euristico generale secondo cui se un'applicazione f commuta con un'applicazione g, allora alcune delle proprietà di g possono essere ereditate da f, ed ho dimostrato come il commutare con un germe linearizzabile possa dare informazioni sui germi che possono essere coniugati ad un dato germe.

Linearizzazione olomorfa simultanea. Ad esempio, una possibile generalizzazione del problema della linearizzazione è chiedersi quando un dato insieme di $m \geq 2$ germi di biolomorfismi $f_1, \ldots, f_m$ di $\mathbb{C}^n$ aventi uno stesso punto fisso, che a meno di traslazioni possiamo supporre essere l'origine, sia *simultaneamente olomorficamente linearizzabile*, ossia esista un cambio locale di coordinate olomorfo, che coniughi ciascun f_h alla sua parte lineare per $h = 1, \ldots, m$.

Ho trovato che se $f_1, \ldots, f_m$ hanno parti lineari diagonalizzabili e sono tali che f_1 commuta con f_h per ogni $h = 2, \ldots, m$, sotto certe condizioni aritmetiche sugli autovalori di $(\mathrm{d}f_1)_O$

ed alcune restrizioni sul tipo di risonanze (che però possono essere presenti), l'esistenza di una linearizzazione simultanea equivale all'esistenza di una particolare varietà complessa f_h-invariante per $h = 1, \ldots, m$ (vedi [R3] per definizioni e dimostrazioni):

Teorema 2. (Raissy, 2009 [R3]) *Siano $f_1, \ldots, f_m$, $m \geq 2$ germi of biolomorfismi di $\mathbb{C}^n$, che fissano l'origine. Supponiamo che f_1 abbia l'origine come punto fisso quasi-Brjuno di ordine s, con $1 \leq s \leq n$, che commuti con f_h per ogni $h = 2, \ldots, m$. Allora $f_1, \ldots, f_m$ sono simultaneamente olomorficamente linearizzabili se e solo se esiste un germe di varietà complessa M di codimensione s, invariante per ciascun f_h, per $h = 1, \ldots, m$, che sia una varietà osculante simultanea per $f_1, \ldots, f_m$ e tale che $f_1|_M, \ldots, f_m|_M$ siano simultaneamente olomorficamente linearizzabili.*

Ho inoltre studiato la forma che una linearizzazione (formale) simultanea può avere, dimostrando che se $f_1, \ldots, f_m$ commutano e le loro parti lineari sono quasi simultaneamente Jordanizzabili allora sono simultaneamente formalmente linearizzabili. Ho poi introdotto una condizione aritmetica simultanea sugli autovalori delle parti lineari dei germi dati, dimostrando che, nel caso in cui le parti lineari dei germi siano simultaneamente diagonalizzabili, se i germi commutano e verificano la condizione di Brjuno simultanea introdotta, allora sono olomorficamente simultaneamente linearizzabili (vedi [R7] per definizioni e dimostrazioni). Il seguente risultato risponde inoltre ad una versione multi-dimensionale di un problema sollevato da Moser [M].

Teorema 3. (Raissy, 2010 [R7]) *Siano $f_1, \ldots, f_m$, $m \geq 2$ germi of biolomorfismi di $\mathbb{C}^n$, che fissano l'origine, formalmente linearizzabili, e con parti lineari simultaneamente diagonalizzabili che soddisfano la condizione di Brjuno simultanea. Allora $f_1, \ldots, f_m$ sono olomorficamente simultaneamente linearizzabili se e solo se commutano a due a due.*

Condizioni di Brjuno per la linearizzazione in presenza di risonanze. Rüssmann in [Rü], usando un approccio funzionale, ha dimostrato che se un germe di biolomorfismo è formalmente linearizzabile e gli autovalori della sua parte lineare soddisfano una condizione aritmetica, che sembra essere lievemente più forte della condizione naturale di tipo Brjuno che risulterebbe naturale utilizzare in questo tipo di problemi, allora il germe è olomorficamente linearizzabile. In [R6], sono riuscita a dare una dimostrazione diretta di un analogo del risultato di Rüssmann sotto un'ipotesi lievemente diversa di tipo Brjuno (che in [R7] si dimostra essere equivalente alla condizione utilizzata da Rüssmann), usando calcoli espliciti mediante serie di potenze e dimostrando la convergenza attraverso un metodo di serie maggioranti (vedi [R6] per definizioni e dimostrazioni):

Teorema 4. (Raissy, 2009 [R6]) *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che fissi l'origine e con $\mathrm{d}f_O$ diagonalizzabile. Se f è formalmente linearizzabile e lo spettro di $\mathrm{d}f_O$ soddisfa la condizione di Brjuno ridotta, allora f è olomorficamente linearizzabile.*

Azioni di toro nel problema della normalizzazione. Ho poi studiato (in [R4]) la commutazione con un particolare tipo di oggetto linearizzabile: le azioni di toro. Ho trovato, in un modo completo e algoritmicamente calcolabile, quale tipo di azioni di toro è necessario cercare per risolvere il problema della normalizzazione di Poincaré-Dulac olomorfa, studiando i possibili fenomeni di torsione. In particolare, ho trovato una corrispondenza fra l'insieme degli autovalori di $\mathrm{d}f_O$ e la matrice dei pesi di un'azione di toro. Il collegamento e la struttura trovati sono più complicati di quanto si credeva ed è stato necessario uno studio dettagliato per capire le relazioni fra azioni di toro, normalizzazione olomorfa e fenomeni di torsione.

Inoltre, in [R4] sono riuscita a evidenziare fino a quale punto sia possibile spingere l'analogia fra germi di campi vettoriali olomorfi e germi di biolomorfismo nel problema della normalizzazione olomorfa, individuando più tipi di torsione, assenti nel caso dei campi vettoriali. Un esempio dei risultati che ho ottenuto è il seguente (vedi [R4] per definizioni, dimostrazioni e altri risultati):

Teorema 5. (Raissy, 2009 [R4]) *Sia f un germe di biolomorfismo di $\mathbb{C}^n$ che fissi l'origine. Supponiamo che, denotato con $\lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ lo spettro di $\mathrm{d}f_O$, l'unico vettore $[\varphi] \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n$ tale che $\lambda = e^{2\pi i[\varphi]}$ abbia grado torico $1 \leq r \leq n$ e sia nel caso di torsione impura. Allora f ammette una normalizzazione olomorfa di Poincaré-Dulac se e solo se esiste un'azione olomorfa su $(\mathbb{C}^n, O)$ di un toro di dimensione $r-1$ che commuti con f e tale che le colonne della matrice dei pesi dell'azione siano vettori torici ridotti privi di torsione associati a $[\varphi]$.*

Ho inoltre trovato un esempio di tecniche che possono essere utilizzate per costruire azioni di toro.

Rinormalizzazione. In collaborazione con il Prof. Marco Abate, in [AR] abbiamo descritto una procedura generale di rinormalizzazione per germi di endomorfismi (ma anche per trasformazioni formali) di $\mathbb{C}^n$ che fissino l'origine, producendo una forma normale formale più semplice della classica forma normale di Poincaré-Dulac. Come esempio di applicazione di tale metodo, abbiamo trovato una lista completa di forme normali per germi quadratici superattrattivi bidimensionali, che non potrebbero essere semplificati utilizzando la classica normalizzazione di Poincaé-Dulac. Infine abbiamo trattato alcuni esempi di rinormalizzazione di germi tangenti all'identità, che rivelano fenomeni interessanti di risonanza al secondo ordine.

Studio di forme normali attraverso il calcolo Mould. Durante il mio lavoro di tesi di laurea specialistica, ho inoltre iniziato una collaborazione con il Prof. Jacky Cresson dell'Université de Pau. In [CR], abbiamo studiato l'insieme dei germi di diffeomorfismi olomorfi risonanti di $\mathbb{C}^n$ nell'origine usando la teoria della prenormalizzazione continua sviluppata da Écalle ([ÉS], [ÉV]), cercando forme prenormali computabili, i.e., ottenibili usando una procedura algoritmica e implementabile. Il contesto dalla prenormalizzazione continua è il *formalismo mould* sviluppato da Écalle dal 1970; tale formalismo fornisce un modo diretto e algoritmico per individuare le caratteristiche universali di una procedura di normalizzazione.

Riferimenti bibliografici.

[Ab] M. Abate: *Discrete local holomorphic dynamics.* In Proceedings of 13th. Seminar on Analysis and Its Applications, Isfahan 2003, Eds. S. Azam et al., University of Isfahan, Iran, (2005), pp. 1–32.

[AR] M. Abate, J. Raissy: *Formal Poincaré-Dulac renormalization for holomorphic germs*, Preprint, 2010

[AT] M. Abate, F. Tovena: *Formal classification of holomorphic maps tangent to the identity.* Disc. Cont. Dyn. Sys. Suppl. 2005 (2005), pp. 1–10.

[Ar] V.I. Arnold: **Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations.** Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[Br] A.D. Brjuno: *Analytic form of differential equations.* Trans. Moscow Math. Soc. **25**, (1971), pp. 131–288; **26**, (1972), pp. 199–239.

[CR] J. Cresson, J. Raissy: *About the trimmed and the Poincaré-Dulac normal form of diffeomorphisms.* Prépublication de l'IHÉS, 2006.

[CNRR] T. Casavecchia, I. Nisoli, J. Raissy, M. Ruggiero **Local dynamics of singular holomorphic foliations**, quaderno del dottorato in Matematica, casa editrice ETS – Pisa (2009).

[D] H. Dulac: *Recherches sur les points singuliers des équationes différentielles*, J. École polytechnique II série cahier IX, (1904), pp. 1–125.

[ÉS] J. Écalle, D. Schlomiuk: *The nilpotent and distinguished form of resonant vector fields or diffeomorphisms.* Ann. Inst. Fourier, **45**, **5**, (1993), pp. 1407–1483.

[ÉV] J. Écalle, B. Vallet: *Prenormalization, correction, and linearization of resonant vector fields or diffeomorphisms.* Prepublication d'Orsay, 1995.

[M] J. Moser: *On commuting circle mappings and simultaneous Diophantine approximations,* Math. Z. **205** (1990), no. 1, pp. 105–121.

[P] H. Poincaré: "Œuvres, Tome I", Gauthier-Villars, Paris, 1928, pp. XXXVI–CXXIX.

[Pö] J. Pöschel: *On invariant manifolds of complex analytic mappings near fixed points.* Exp. Math., 4, (1986), pp. 97–109.

[R1] J. Raissy: **Normalizzazione di campi vettoriali olomorfi**. Tesi di Laurea Specialistica, http://etd.adm.unipi.it/theses/available/etd-06022006-141206/, 2006.

[R2] J. Raissy: *Linearization of holomorphic germs with quasi-Brjuno fixed points*, Mathematische Zeitschrift, Volume **264**,(2010), pp 881–900.

[R3] J. Raissy: *Simultaneous linearization of holomorphic germs in presence of resonances*, Conform. Geom. Dyn. **13** (2009), pp 217–224.

[R4] J. Raissy: *Torus actions in the normalization problem*, Journal of Geometric Analysis, Volume **20**, (2010), pp 472–524.

[R5] J. Raissy: **Geometrical methods in the normalization of germs of biholomorphisms**, http://etd.adm.unipi.it/theses/available/etd-02112010-094712/, tesi di dottorato, Università di Pisa (2009),

[R6] J. Raissy: *Brjuno conditions for linearization in presence of resonances*, in corso di stampa nel volume **"Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDE's; Generalized Borel Summation"**, proceedings della conferenza svoltasi al CRM di Pisa, 12–16 ottobre 2009, O. Costin, F. Fauvet, F. Menous e D. Sauzin editori, **"CRM series", Pisa, Edizioni Della Normale 2010**, arXiv:0911.4341v1.

[R7] J. Raissy: *Holomorphic linearization of commuting germs of holomorphic maps*, Quaderno di Matematica n. 12/2010, Università degli Studi di Milano Bicocca, Preprint, 2010, arXiv:1005.3434v1.

[Ro] F. Rong: *Linearization of holomorphic germs with quasi-parabolic fixed points.* Ergodic Theory Dynam. Systems **28** (2008), no. 3, pp. 979–986.

[Rü] H. Rüssmann: *Stability of elliptic fixed points of analytic area-preserving mappings under the Brjuno condition,* Ergodic Theory Dynam. Systems, **22** (2002), pp. 1551–1573.

[Si] C.L. Siegel: *Iteration of analytic functions.* Annals of Mathematics, **43**, (1942), pp. 607–612.

[Zu1] N.T. Zung: *Convergence versus integrability in Poincaré-Dulac normal form*, Math. Res. Lett. **9**, 2-3, (2002), pp. 217–228.

[Zu2] N.T. Zung: *Convergence versus integrability in Birkhoff normal form*, Annals of Mathematics (2), **161**, **1**, (2005), pp. 141–156.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

JASMIN RAISSY

Tesi di Dottorato

- J. RAISSY: **Geometrical methods in the normalization of germs of biholomorphisms**, http://etd.adm.unipi.it/theses/available/etd-02112010-094712/, tesi di dottorato, Università di Pisa (2009).

Libri

- T. CASAVECCHIA, I. NISOLI, J. RAISSY, M. RUGGIERO: **Local dynamics of singular holomorphic foliations**, quaderno del dottorato in Matematica, casa editrice ETS – Pisa (2009).

Articoli pubblicati

- J. RAISSY: *Torus actions in the normalization problem*, Journal of Geometric Analysis, Volume **20**, Number 2 / April 2010, (2010), pp 472–524.
- J. RAISSY: *Simultaneous linearization of holomorphic germs in presence of resonances*, Conform. Geom. Dyn. **13** (2009), pp 217–224.
- J. RAISSY: *Linearization of holomorphic germs with quasi-Brjuno fixed points*, Mathematische Zeitschrift, Volume **264**, Number 4 / April, 2010 (2010), pp 881–900.

Articoli accettati per la pubblicazione

- J. RAISSY: *Brjuno conditions for linearization in presence of resonances*, in corso di stampa nel volume **"Asymptotics in Dynamics, Geometry and PDE's; Generalized Borel Summation"**, proceedings della conferenza svoltasi al CRM di Pisa, 12–16 ottobre 2009, O. Costin, F. Fauvet, F. Menous e D. Sauzin editori, **"CRM series", Pisa, Edizioni Della Normale 2010**, arXiv:0911.4341v1.

Prepubblicazioni

- M. ABATE, J. RAISSY: *Formal Poincaré-Dulac renormalization for holomorphic germs*, Preprint, 2010.
- J. RAISSY: *Holomorphic linearization of commuting germs of holomorphic maps*, Quaderno di Matematica n. 12/2010, Università degli Studi di Milano Bicocca, Preprint, 2010, arXiv:1005.3434v1.
- J. CRESSON, J. RAISSY: *About the trimmed and the Poincaré-Dulac normal form of diffeomorphisms*. Prépublication de l'IHÉS, 2006.