Fascicolo di candidatura

del

Dott. Raffaele Dario Marcovecchio

10 dicembre 2009

Indice

Parte I

Presentazione del candidato

1 Curriculum Vitae

1.1 Dati anagrafici

Raffaele Dario Marcovecchio, nato a Foggia l'8-12-1974, cittadinanza italiana. Residente in: Via Ruggero Grieco, 32 - 71100 Foggia.

Domiciliato in: Beethovengasse 3/19 - 1090 Wien - Austria. E-mail: marcovr8@univie.ac.at

Posizione accademica

Dall'1 settembre 2008: Post-Doc alla Facoltà di Matematica dell'Università di Vienna, Austria, fino al 31/08/2010, nel gruppo di Combinatoria diretto dal Prof. C.Krattenthaler. Indirizzo:
Fakultät für Mathematik
Universität Wien
Nordbergstraße 15
1090 Vienna
Austria

Tel: +43 1 4277 50700
E-mail: `marcovr8@univie.ac.at`

1.2 Titoli accademici

Laurea in Matematica all'Università degli Studi di Pisa, sotto la direzione del Prof. C. Viola. Tesi sostenuta il 25-11-1999.

Fruizione di una borsa di studio triennale per la frequenza di un Corso di Dottorato in Matematica all'Università degli Studi di Pisa. Tesi sotto la supervisione del Prof. F. Amoroso e del Prof. C. Viola, sostenuta il 15-11-2004 davanti alla commissione così composta: Prof. F. Amoroso, Prof. R. Dvornicich, Prof. A. Perelli, Prof. H. P. Schlickewei, Prof. C. Viola.

1.3 Attività scientifica e didattica

ott. 2006 - ago. 2007	Post-Doc, con incarichi didattici, al "Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme" dell'Università di Caen. Denominazione dell'incarico: A.T.E.R.: Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche.
sett. 2007 - ago. 2008	"A.T.E.R." all'"Institut Fourier" dell'Università di Grenoble I, Francia.
sett. 2008 -	Post-Doc alla Facoltà di Matematica dell'Università di Vienna, Austria, fino al 31/08/2010.

1.4 Temi di Ricerca

Equazioni diofantee polinomiali-esponenziali, teoria della trascendenza delle funzioni speciali, logaritmi, polilogaritmi, misura d'irrazionalità, misura di indipendenza lineare su un corpo di numeri, misura di non-quadraticità, approssimanti di Padé.

1.5 Competenze informatiche

Uso regolarmente i seguenti programmi e sistemi operativi: Windows XP, Linux, Latex, Maple, Mathematica, Pari/GP.

1.6 Lingue straniere

Parlo correntemente francese, anche grazie alla prolungata esperienza lavorativa in Francia. Conosco abbastanza l'inglese. Posseggo nozioni elementari di tedesco.

2 Pubblicazioni

[1] Raffaele Marcovecchio, *Determinanti polinomiali-esponenziali*, Boll. Unione Mat. Ital. (8) **7**-B (2004), 713–730.

[2] Raffaele Marcovecchio, *Linear independence of linear forms in polylogarithms*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) **5** (2006), 1–11.

[3] Raffaele Marcovecchio, *The Rhin-Viola method for* $\log 2$, Acta Arith. **139** (2009), 147–184.

3 Esperienze didattiche

2007-2008 Università di Grenoble	52 ore di esercitazioni Algebra lineare ed Analisi	primo anno Laurea in Geologia
	39 ore di esercitazioni Introduzione ai sistemi dinamici ed alla modellizzazione	primo anno Laurea in Biologia
2006-2007 Università di Caen	8 ore di corso e 20 ore di esercitazione Approfondimenti di matematica	primo anno Matematica applicata e Scienze sociali
	36 ore di esercitazioni Algebra	quarto anno Laurea specialistica in Matematica fondamentale e Matematica per l'Informatica
	28 ore di esercitazioni Statistica	primo anno Laurea in Biologia

4 Attività di ricerca

4.1 Conferenze in convegni internazionali

Linear independence of linear forms in polylogarithms, al CIRM, Luminy (Francia), l'8 settembre 2006.

La méthode de Rhin-Viola pour $\log 2$, al convegno in onore di Georges Rhin: Méthodes algorithmiques en théorie des nombres, all'Università Paul Verlaine, Metz (Francia), il 20 giugno 2008.

4.2 Seminari

6 ottobre 2000, *Molteplicità degli zeri per le successioni lineari ricorrenti*, all'Università di Pisa.

30 ottobre 2005, *Linear independence of linear forms in polylogarithms*, all'Università di Caen, Francia.

13 febbraio 2008, *Approximants de Padé et mesures de transcendance*, all'Università di Grenoble, Francia.

11 giugno 2008, *Approximantions simultanées de* $\log 2$ *et* $\log^2 2$, all'Università di Grenoble, Francia.

24 giugno 2008, *Intégrales doubles complexes et* $\log 2$, all'Università di Lione, Francia.

8 luglio 2008, *Il metodo di Rhin-Viola per* $\log 2$, all'Università di Pisa.

23 gennaio 2009, *Nouvelles mesures d'irrationalité et de non-quadraticité de* $\log 2$, all'Università di Caen, Francia.

4.3 Convegni (partecipazione, senza seminario)

28 giugno - 6 luglio 2000, *Diophantine Approximation*, Cetraro, Fondazione CIME, organizzato da F. Amoroso e da U. Zannier.

11 - 18 luglio 2002, *Analytic Number Theory*, Cetraro, Fondazione CIME, organizzato da A. Perelli e C. Viola.

13 - 15 novembre 2003, *Secondo Convegno Italiano di Teoria dei Numeri*, Parma, organizzato da A. Perelli, C. Viola, A. Zaccagnini e U. Zannier.

1 aprile - 31 luglio 2005, *Diophantine Geometry*, Pisa, Centro di Ricerca Matematica Ennio De Giorgi, Scuola Normale Superiore, organizzato da Y. Bilu, E. Bombieri, D. Masser, L. Szpiro, U. Zannier.

15 - 17 giugno 2006, *XVII-èmes Rencontres Arithmétiques de Caen: "Approximation Diophantienne"*, Caen, organizzato da F. Amoroso e E. Reyssat.

30 novembre - 1 dicembre 2006, *Atelier franco-japonais sur les fonctions zêta*, Caen, organizzato da D. Essouabri.

22 giugno, *La journée de Mathan*, Univ. Bordeaux I, Talence, organizzata da J. Fresnel.

26 - 27 giugno 2007, *XVIII-èmes Rencontres Arithmétiques de Caen: "Méthodes algébriques et algorithmiques en théorie des nombres"*, Caen, organizzato da B. Anglès e D. Simon.

10 - 15 settembre 2007, *Arithmetic Geometry*, Cetraro, Fondazione CIME, organizzato da P. Corvaja e C. Gasbarri.

8 - 12 ottobre 2007, *Développements récents en Approximation Diophantienne*, organizzato da B. Adamcewski, N. Ratazzi, T. Rivoal.

29 maggio 2008, *Journée en l'honneur de Roland Gillard*, Grenoble, Francia, organizzata da R. Bacher, P. Elbaz-Vincent e A. Pantchichkine.

19 - 20 juin 2008, *Méthodes algorithmiques en théorie des nombres. Un colloque en l'honneur de Georges Rhin*, Metz, comitato scientifico: G.Tenenbaum, C.Viola, M.Waldschmidt. Organizzato da C.Bennis, C.Brighi, I.Dubois, V.Flammang, J.-M.Sac-Epée, F.Soriano-Gafiuk.

29 - 30 settembre 2008, *Festkolloquium au Anlass des 75. Geburtstages von Herrn Prof. Wolfgang Schmidt*, Vienna, Austria.

6 - 10 luglio 2009, *XXVI-émes Journées Arithmétiques*, Saint-Etienne, Francia. Comitato scientifico: S.Akiyama, F.Amoroso, K.Buzzard, B.Conrad,

K.Consani, P.Liardet, R.Pink, P.Tretkoff (nata Cohen), J.Urbanowicz, G.Van der Geer. Comitato d'organizzazione: D.Essouabri, F.Foucault, G.Grekos, F.Hennecart, F.Pellarin, O.Robert.

Parte II

Presentazione analitica dei lavori

5 Tesi di Laurea

5.1 Gruppi di permutazioni ed approssimazione diofantea

La tesi contiene una discussione dettagliata del metodo di Rhin-Viola [Rh-Vi1] per la costante $\zeta(2)$, che fornisce la migliore misura d'irrazionalità conosciuta.

Nella parte di ricerca, si tenta di estendere il metodo precedente a $\zeta(3)$. A tale scopo abbiamo introdotto la trasformazione birazionale φ del cubo unitario $[0,1]^3$

$$\varphi : \begin{cases} X = 1-(1-xy)z; \\ Y = \dfrac{xy}{1-(1-xy)z}; \\ Z = \dfrac{1-x}{1-xy}. \end{cases}$$

La proprietà più importante di φ è che essa soddisfa l'equazione differenziale

$$\frac{dx\ dy\ dz}{1-(1-xy)z} = -\frac{dX\ dY\ dZ}{1-(1-XY)Z}.$$

Inoltre φ è un'involuzione. L'introduzione di questa trasformazione è motivata dal fatto che, se σ è l'inversione di x e y, allora $\varphi\sigma\varphi\sigma$ è la trasformazione introdotta da Beukers nella sua dimostrazione dell'irrazionalità di $\zeta(3)$.

6 Tesi di Dottorato

6.1 Determinanti polinomiali-esponenziali (articolo pubblicato)

Sia $\mathbb{K}$ un corpo di caratteristica 0. Un'equazione polinomiale-esponenziale è un'equazione della forma

$$\sum_{l=1}^{n} P_l(\boldsymbol{x})\boldsymbol{\alpha}_l(\boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}^s \tag{6.1}$$

dove $\boldsymbol{\alpha}_l = (\alpha_{l1}, \dots, \alpha_{ls}) \in (\mathbb{K}^\times)^s$, $\boldsymbol{\alpha}_l^{\boldsymbol{x}} = \alpha_{l1}^{x_1} \cdots \alpha_{ls}^{x_s}$ e $P_1, \dots, P_n$ sono polinomi in s variabili a coefficienti in $\mathbb{K}$.

L'equazione (6.1) si dice *puramente esponenziale* se tutti i polinomi P_l sono costanti.

Siano $k \geq m \geq 1$ interi, e siano $r_1, \dots, r_m$ interi positivi tali che

$$r_1 + \cdots + r_m = k. \tag{6.2}$$

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}^\times$. Sia $G(\boldsymbol{x}) = G(\alpha_1, \dots, \alpha_m; r_1, \dots, r_m; x_1, \dots, x_k)$ la funzione di variabili intere $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_k)$ definita da

$$G(\boldsymbol{x}) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{x_1} & \cdots & x_1^{r_1-1}\alpha_1^{x_1} & \cdots & \alpha_m^{x_1} & \cdots & x_1^{r_m-1}\alpha_m^{x_1} \\ \alpha_1^{x_2} & \cdots & x_2^{r_1-1}\alpha_1^{x_2} & \cdots & \alpha_m^{x_2} & \cdots & x_2^{r_m-1}\alpha_m^{x_2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{x_k} & \cdots & x_k^{r_1-1}\alpha_1^{x_k} & \cdots & \alpha_m^{x_k} & \cdots & x_k^{r_m-1}\alpha_m^{x_k} \end{vmatrix}. \tag{6.3}$$

Il determinante $G(\boldsymbol{x})$ è una generalizzazione di quello di Méray [Me] (si veda anche [Am]).

La funzione G soddisfa

$$G(x_1, \dots, x_k) = (\alpha_1^{r_1} \cdots \alpha_m^{r_m})^{x_1} G(0, x_2 - x_1, \dots, x_k - x_1). \tag{6.4}$$

Nello studio dell'equazione

$$G(\boldsymbol{x}) = 0, \tag{6.5}$$

possiamo quindi supporre $x_1 = 0$.

Supponiamo nel seguito che $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}^\times$ verifichino la condizione seguente:

$$\alpha_h/\alpha_i \text{ non è una radice dell'unità per ogni } h \neq i. \tag{6.6}$$

Un sottodeterminante Δ di $G(\alpha_1, \dots, \alpha_m; r_1, \dots, r_m; x_1, \dots, x_k)$ si dice *ben messo* se è esso stesso del tipo (6.3), cioè se esistono degli interi positivi m', $i_1, \dots, i_{m'}$, $r'_1, \dots, r'_{m'}$, k', $j_1, \dots, j_{k'}$, con $1 \leq m' \leq m$, $1 \leq i_1 < \dots < i_{m'} \leq m$, $1 \leq r'_h \leq r_{i_h}$ per ogni $h = 1, \dots, m'$, $k' = r'_1 + \dots + r'_{m'}$, $1 \leq j_1 < \dots < j_{k'} \leq k$, tali che

$$\Delta = G(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{m'}}; r'_1, \dots, r'_{m'}; x_{j_1}, \dots, x_{j_{k'}}).$$

Diciamo che una soluzione $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k$ di (6.5) è in *posizione generica* se nessun sottodeterminante proprio ben messo Δ di $G(\boldsymbol{x})$ si annulla.

Se $m = k$, e quindi $r_1 = \dots = r_m = 1$, l'equazione (6.5) diventa puramente esponenziale. In questo caso, si ha:

Teorema 1. (Schlickewei e Viola [Sc-Vi3]) *Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}^\times$ che verificano (6.6). Allora l'equazione*

$$F(0, y_2, \dots, y_k) = 0 \tag{6.7}$$

ha al più $\exp((6k!)^{3k!})$ soluzioni $(y_2, \dots, y_k) \in \mathbb{Z}^{k-1}$ in posizione generica.

È naturale chiedersi se e come si possa estendere il teorema 1 all'equazione $G(0, y_2, \dots, y_k) = 0$, se $1 < m < k$. Il teorema seguente risponde a questa questione nel caso in cui $\mathbb{K}$ è un corpo di numeri e $k = 4$:

Teorema 2. (Marcovecchio [Ma1]) *Sia $\mathbb{K}$ un corpo di numeri di grado d, e siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}^\times$, con $2 \leq m \leq 3$, che verificano (6.6). Allora l'equazione*

$$G(0, y_2, y_3, y_4) = 0$$

ha al più

$$2^{2^{25}} d^{38400}$$

soluzioni in posizione generica.

La dimostrazione di questo teorema utilizza un argomento contenuto nella dimostrazione del teorema 1, combinata con un'analisi combinatoria di certi casi particolari.

Questo risultato, sebbene parziale, può avere applicazioni simili a quelle contenute in [Sc-Vi1] e [Sc-Vi2].

6.2 $\mathbb{Q}(\alpha)$–indipendenza lineare di $1, \mathrm{Li}_1(\alpha), \mathrm{Li}_2(\alpha)$ (non pubblicato)

Il polilogaritmo $\mathrm{Li}_s(z)$ è definito, per $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ e s intero positivo, dalla serie seguente:

$$\mathrm{Li}_s(z) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^s}. \tag{6.8}$$

Abbiamo dimostrato l'indipendenza lineare su $\mathbb{Q}(\alpha)$ di 1, $\mathrm{Li}_1(\alpha)$, $\mathrm{Li}_2(\alpha)$ per una classe di numeri algebrici α.

A tale scopo utilizziamo le approssimanti di Padé del tipo II delle funzioni $1, \mathrm{Li}_1(z), \mathrm{Li}_2(z)$ introdotte da Hata [H1]. La nostra generalizzazione del risultato di Hata è analoga all'estensione contenuta in [Am-Vi] del metodo introdotto in [V].

I seguenti casi particolari sono illustrativi del risultato da noi ottenuto: $1, \mathrm{Li}_1(\alpha), \mathrm{Li}_2(\alpha)$ sono $\mathbb{Q}(\alpha)$–linearmente indipendenti se:

1. $\alpha = p/q$ razionale.

$$\begin{array}{lll} p = 1, & q \leq -8 \text{ o } q \geq 12 & \text{(Hata [H1])} \\ p = 2, & q \leq -65 \text{ o } q \geq 79 & \\ p = 3, & q \leq -218 \text{ o } q \geq 250 & \\ p = 4, & q \leq -517 \text{ o } q \geq 573, & \end{array}$$

più in generale, $p > 0$ e $|q| > \widetilde{q}(p)$, dove asintoticamente si ha

$$\widetilde{q}(p) \sim \frac{4e^4}{27} p^3,$$

per $p \to +\infty$. Qui e nel seguito del paragrafo p e q sono interi.

2. α quadratico immaginario, $\alpha = i\sqrt{1/q}$, con $q \geq 108$, e dunque in particolare $\alpha = i/s$, con $|s| \geq 11$. Più generalmente $\alpha = i\sqrt{p/q}$, con $p > 0$ e $q \geq \widetilde{q}(p) > 0$, con il comportamento asintotico

$$\widetilde{q}(p) \sim \left(\frac{4e^4}{27}\right)^2 p^3,$$

per $p \to +\infty$.

3. α quadratico reale. $\alpha = 577 - 408\sqrt{2}$, $362 - 209\sqrt{3}$, $682 - 305\sqrt{5}$.

4. α cubico complesso. Possiamo scegliere come α una delle radici complesse coniugate di x^3+qx^2+1, con $q \geq 5381$, oppure di x^3+qx^2-1, con $q \leq -4845$.

Più in generale, α può essere scelto come una delle radici di x^3+qx^2+p, con $pq > 0$, e $|q| > \widetilde{q}(p)$, dove

$$\widetilde{q}(p) \sim \left(\frac{4e^6}{27}\right)^2 |p|^3.$$

per $p \to +\infty$.

5. α cubico reale, α uguale alla radice reale di x^3+qx+1 più vicina a $-1/q$, con $q \geq 69008$, oppure $q \leq -60744$.

6. α di grado qualsiasi $D \geq 3$. Possiamo scegliere α uguale alla radice di x^D+qx^2+1 più vicina a $\pm i/\sqrt{q}$, con $q > \widetilde{q}(D)$, dove

$$\widetilde{q}(D) \sim \left(\frac{4e^{2D}}{27}\right)^2$$

per $D \to +\infty$.

Possiamo inoltre scegliere come α la radice reale del polinomio x^D+qx+1 più vicina a $-1/q$, con $|q| > \widetilde{q}(D)$, dove

$$\widetilde{q}(D) \sim \frac{4e^{4D}}{27}$$

per $D \to +\infty$.

7 Lavori successivi alla Tesi di Dottorato

7.1 Indipendenza lineare di forme lineari in polilogaritmi (pubblicato)

Dimostriamo in [Ma2] che per ogni α algebrico non nullo tale che $|\alpha| < 1$, lo spazio vettoriale generato su $\mathbb{Q}(\alpha)$ da $1, \mathrm{Li}_1(\alpha), \mathrm{Li}_2(\alpha), \ldots$ ha dimensione infinita, dove $\mathrm{Li}_s(z)$ è la funzione definita in (6.8).

Nel caso particolare in cui α è razionale, questo risultato è dovuto a Rivoal [Ri]. In questo lavoro abbiamo aggirato il metodo del punto di sella in più variabili applicando il metodo del determinante, introdotto da Siegel ed utilizzato in questo contesto da Nikishin [N]. La nostra generalizzazione usa un risultato dovuto a Fischler e Rivoal [Fi-Ri]. Inoltre essa è analoga all'estensione dovuta ad Amoroso e Viola [Am-Vi] del metodo di Viola [V].

Più in dettaglio, utilizziamo la funzione ipergeometrica

$$N_n(a,q,r;z) = \frac{n!^{a-r}(rn)!^{a+1}}{((r+1)n)!^{a-q}((r+1)n+1)!^q}\, z^{-rn-1} \times \\ \times \sum_{s\geq 0} \frac{(rn+1)_s^{a+1}}{((r+1)n+1)_s^{a-q}((r+1)n+2)_s^q}\, \frac{z^{-s}}{s!},$$

dove $0 \leq q \leq a$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$ $n \in \mathbb{N}$ e $0 < r < a$ è un parametro reale. Si ha la decomposizione

$$N_n(a,q,r;z) = \sum_{h=1}^{a} A_n^{(h)}(a,q,r;z)\mathrm{Li}_h(1/z) - A_n^{(0)}(a,q,r;z), \tag{7.1}$$

dove $A_n^{(h)}(a,q,r;z)$ è un polinomio in z a coefficienti razionali. Il nostro risultato principale è rappresentato dalla formula

$$\det(A_n^{(h)}(a,q,r;z))_{\substack{h=0,\ldots,a\\ q=0,\ldots,a}} = \pm \left(\frac{(rn)!}{n!^r}\right)^{a+1} (z-1)^{an-rn-1}.$$

Ciò dimostra che (7.1), per $q = 0, 1, \ldots, a$, sono linearmente indipendenti per ogni $z \neq 1$.

7.2 Il metodo di Rhin-Viola per $\log 2$ (pubblicato)

In [Ma3] utilizziamo il metodo di Rhin e Viola([Rh-Vi1], [Rh-Vi2], [Rh-Vi3]) per migliorare le misure di non quadraticità dei logaritmi dei numeri razionali dimostrate da Hata [H2]. Ad esempio, dimostriamo che

$$\mu_2(\log 2) < 15.6515.$$

Con lo stesso metodo miglioriamo la misura d'irrazionalità di $\log 2$ dovuta a Rukhadze [Ru], ottenuta nel 1987.

Infatti, dimostriamo che per ogni numero razionale p/q con q abbastanza grande si ha

$$\left|\log 2 - \frac{p}{q}\right| > q^{-3.57455391},$$

cioè

$$\mu(\log 2) < 3.57455391,$$

il record precedente in [Ru] era

$$\mu(\log 2) < 3.89139978.$$

Il nostro miglioramento utilizza una famiglia di integrali doppi complessi di certe funzioni razionali, ovvero

$$I(h,j,k,l,m,q;x) := x^{\max\{0,q-l,m-h\}}(1-x)^{k+l+m+1} \\ \times \int_{s=0}^{i\infty}\int_{t=0}^{-i\infty} \frac{s^h t^j \; ds \; dt}{(1-s)^{l+k-j+1}(s-t)^{h+j-k+1}(t-x)^{k+m-h+1}}, \quad (7.2)$$

dove h, j, k, l, m, q sono interi positivi tali che $h + j + q = k + l + m$ e che $l + k - j, h + j - k, k + m - h$ siano anch'essi positivi, e x è un parametro reale tale che $0 < x < 1$. La forma di questa funzione è suggerita dalla costruzione introdotta da Sorokin [So] delle approssimanti di Padé simultanee di $1, \log x, \ldots, \log^k x$ nel punto $x = 1$.

Una tecnica utilizzata nella dimostrazione è il "metodo di Laplace discreto", nella forma sviluppata da Ball e Rivoal [Ba-Ri], che ci consente di ottenere il comportamento asintotico del coefficiente di $\log 2$ nella parte immaginaria dell'integrale (7.2), in cui si è posto $x = 1/2$. Una versione debole del metodo del punto di sella in $\mathbb{C}^2$ dovuto ad Hata permette di ottenere la maggiorazione asintotica dell'integrale. Il metodo del gruppo di permutazioni dovuto a Rhin e Viola è utilizzato per determinare dei buoni denominatori per i coefficienti di 1 e $\log 2$ nella parte immaginaria dell'integrale, e di 1, $\log 2$ e $\log^2 2$ nella parte reale.

8 Programma di ricerca

8.1 Congettura dei denominatori per $\zeta(4)$

Nella sua tesi di dottorato, Rivoal ha formulato una congettura sul denominatore comune dei coefficienti delle combinazioni lineari nei valori della funzione zeta negli interi dispari, utilizzate nella dimostrazione del suo celebre risultato sull'irrazionalità di infiniti numeri tra $\zeta(5), \zeta(7), \zeta(9), \ldots$. Questa congettura è stata dimostrata, in una forma molto generale, da Krattenthaler e Rivoal ([Kr-Ri], Teorema 1).

Inoltre, in [Z] Zudilin ha considerato la serie seguente, che fornisce una combinazione lineare in 1 e $\zeta(4)$ a coefficienti razionali:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial k} \left(\left(k + \frac{n}{2} \right) \frac{(k-n)_n^2 (k+n+1)_n^2}{(k)_{n+1}^4} \right) = u_n \zeta(4) - v_n.$$

Poniamo $d_n = \text{ mcm } \{1, 2, \ldots, n\}$. Zudilin dimostra che $d_n u_n, d_n^5 v_n$ sono interi, e congettura che $\Phi_n^{-1} u_n, \Phi_n^{-1} d_n^4 v_n \in \mathbb{Z}$, dove

$$\Phi_n = \prod_{\substack{p \text{ primo} \\ \{n/p\} \in [2/3, 1)}} p.$$

Nello stesso articolo (Teorema 3 di [Z]) Zudilin ha anche ottenuto il seguente risultato condizionale sulla misura d'irrazionalità di $\zeta(4)$: se

$$d_{m_1} d_{m_2} d_{m_3} d_{m_4} \cdot \Phi^{-1}(e) \cdot H(e) \in \mathbb{Z}\zeta(4) + \mathbb{Z}, \tag{8.1}$$

allora:

$$\mu(\zeta(4)) < 25.38983114.$$

Qui $H(e)$ è una generalizzazione della serie precedente che fornisce $u_n \zeta(4) - v_n$ che dipende da più parametri, e $\Phi(e)$ e i d_{m_i} generalizzano Φ_n e d_n.

D'altra parte, in [Kr-Ri] Krattenthaler e Rivoal dimostrano un caso particolare di questa congettura, quello previsto dall'inclusione (25) di [Z]:

$$\Phi_n^{-1} d_n^4 (u_n \zeta(4) - v_n) \in \mathbb{Z}\zeta(4) + \mathbb{Z}. \tag{8.2}$$

Infatti il Teorema 2 di [Kr-Ri] afferma che $\Phi_n^{-1} u_n$ e $2\Phi_n^{-1} d_n^4 v_n$ sono interi. Purtroppo questo risultato non basta per le applicazioni diofantee, in quanto la successione in (8.2) non tende a 0 per $n \to \infty$. In questo caso si potrebbe prevedere di usare il metodo del gruppo di permutazioni per studiare le proprietà aritmetiche di $H(e)$.

Un progetto di ricerca con C.Krattenthaler è quello di attaccare la congettura dei denominatori di Zudilin. Utilizzando certe identità tra prodotti di coefficienti binomiali e il metodo introdotto nella dimostrazione del Teorema 2 di [Kr-Ri], dovrebbe essere ragionevolmente possibile dimostrare almeno un'inclusione intermedia tra (8.1) e (8.2).

8.2 Logaritmi dei numeri algebrici (in preparazione)

In un lavoro in preparazione in collaborazione con C.Viola ci interessiamo alle proprietà diofantee dei logaritmi di certi numeri algebrici. In questo nuovo contesto, cioè $0 < |x| < 1$, la stima asintotica del coefficiente di $\log x$ nella parte immaginaria dell'integrale (7.2) non è elementare, e richiede il metodo del punto di sella in $\mathbb{C}^2$ per il doppio integrale di contorno della stessa funzione $f(s,t)$ che compare in (7.2):

$$J(h,j,k,l,m,q;x) := x^{\max\{0,q-l,m-h\}}(1-x)^{k+l+m+1}$$
$$\times \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint\limits_{|s|=R} \oint\limits_{|t|=r} \frac{s^h t^j \; ds \; dt}{(1-s)^{l+k-j+1}(s-t)^{h+j-k+1}(t-x)^{k+m-h+1}}.$$

Poiché sembra difficile determinare il comportamento asintotico esatto della forma lineare in 1 e $\log x$, cioè della parte immaginaria di (7.2), abbiamo anche trovato un criterio simile a quello dovuto ad Amoroso e Viola [Am-Vi], nel quale si utilizza il fatto che $\log x$ è trascendente (per x algebrico, $x \neq 0, 1$) per indebolire l'ipotesi fatta in [Am-Vi] sul comportamento asintotico esatto di $|\log x - \theta_n|$, dove θ_n è una successione di elementi del corpo $\mathbb{Q}(x)$. Inoltre abbiamo generalizzato tale criterio alla dimensione 2.

8.3 Misure d'irrazionalità dei logaritmi

Il metodo utilizzato in [Ma3] suggerisce altre linee di ricerca. Infatti, l'integrale (7.2) rappresenta, in un certo senso, una generalizzazione in dimensione 2 dell'integrale semplice euleriano su [0,1] introdotto in [V]. L'idea consiste nel ricercare generalizzazioni in dimensione 3 o maggiore dell'integrale (7.2), oppure analoghe generalizzazioni di altri integrali presenti in letteratura.

Riferimenti bibliografici

[Am] F.Amoroso, *Upper bounds for the resultant and Diophantine applications.* Number Theory (Eger, 1996), 23–36, de Gruyter, Berlin, 1998.

[Am-Vi] F.Amoroso e C.Viola, *Approximation measures for logarithms of algebraic numbers.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) **30** (2001), no. 1, 225–249.

[Ba-Ri] K.Ball e T.Rivoal, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs.* Invent. Math. **146** (2001), 193–207.

[Fi-Ri] S.Fischler e T. Rivoal, *Approximants de Padé et séries hypergéométriques équilibrées,* J. Math. Pures Appl. (9) **82** (2003), no. 10, 1369–1394.

[H1] M.Hata, *On the linear independence of the values of polylogarithmic functions.* J. Math. Pures Appl. (9) **69** (1990), no. 2, 133–173.

[H2] M.Hata, $\mathbb{C}^2$*-saddle method and Beukers' integral,* Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 10, 4557–4583.

[Kr-Ri] C.Krattenthaler e T.Rivoal, *Hypergéometrie et fonction zeta de Riemann,* Mem. Amer. Math. Soc. **186** (2007), no. 875, x+87 pp.

[Ma1] R.Marcovecchio, *Determinanti polinomiali-esponenziali*, Boll. Unione Mat. Ital. (8) **7**-B (2004), 713–730.

[Ma2] R.Marcovecchio, *Linear independence of linear forms in polylogarithms*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) **5** (2006), 1–11.

[Ma3] R.Marcovecchio, *The Rhin-Viola method for* $\log 2$, Acta Arith. **139** (2009), 147–184.

[Me] C.Méray, *Sur un déterminant dont celui de Vandermonde n'est qu'un cas particulier.* Revue de Mathematique Spéciales **9** (1899), 217–219.

[N] E.M.Nikishin, *Irrationality of values of functions* $F(x, s)$. Mat. Sb. (N.S.) **109(151)** (1979), no. 3, 410–417, 479 (russe); traduction anglaise en Math. USSR-Sb. **37** (1980), no.3, 381–388.

[Rh-Vi1] G.Rhin e C.Viola, *On a permutation group related to* $\zeta(2)$, Acta Arith. **77** (1996), no.1, 23–56.

[Rh-Vi2] G.Rhin e C.Viola, *The group structure for* $\zeta(3)$, Acta Arith. **97** (2001), no.3, 269–293.

[Rh-Vi3] G.Rhin e C.Viola, *The permutation group method for the dilogarithm*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (5) **4** (2005), 389–437.

[Ri] T.Rivoal, *Indepéndance linéaire de valeurs des polylogarithmes,* J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), no. 2, 551–559.

[Ru] E.A.Rukhadze, *A lower bound for the approximations of* ln2 *by rational numbers* (russian), Vesnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. (1987), no.6, 25–29,97.

[Sc-Vi1] H.P.Schlickewei e C.Viola, *Polynomials that divide many trinomials.* Acta Arith. **78** (1997), 267–273.

[Sc-Vi2] H.P.Schlickewei e C.Viola, *Polynomials that divide many k-nomials.* Number theory in progress, Vol.1(Zakopane-Kościelisko, 1997), 445–450, de Gruyter, Berlin, 1999.

[Sc-Vi3] H.P.Schlickewei e C.Viola, *Generalized Vandermonde determinants.* Acta Arith. **95** (2000), 123–137.

[So] V.N.Sorokin, *The Hermite-Padé approximations for sequential logarithm degrees with number-theoretical applications,* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat. **1991** (1992), no.11, 66–74 (russian); english translation in Soviet Math. (Iz. VUZ) **35** (1991), no. 11, 67–74.

[V] C.Viola, *Hypergeometric functions and irrationality measures.* Analytic number theory (Kyoto, 1996). London Math. Soc. Lecture Note Ser. **247**, 353–360, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[Z] W.Zudilin, *Well-poised hypergeometric service for diophantine problems of zeta values.* J. Théor. Nombres Bordeaux **15**.2 (2003), 593–626.