

Curriculum dell'attività scientifica e didattica di Giovanni Manno

Luogo e data di nascita: Napoli, 29 novembre 1976.

Residenza: P.zza San Pietro in Ciel d'Oro, 20 Pavia.

Istruzione Secondaria: Maturità Scientifica, Luglio 1994, 60/60.

Laurea in Matematica: Università Federico II di Napoli, 24 marzo 1999, 110/110 e lode.

Dottorato di Ricerca in Matematica: Corso di studio presso il King's College di Londra. Tesi di Ph.D. consegnata il 30 settembre 2003. Esame di Ph.D sostenuto il 26/4/2004, titolo conseguito il 31/10/2004.

Esaminatori: S.K. Donaldson, D.J. Saunders.

Titolo della tesi: Jet Methods for the Finite Order Variational Sequence and the Geodesic Equation

Lingue straniere conosciute

1. Inglese: buon livello
2. Francese: scolastico

Posizione attuale

1. Marie Curie Fellow, Mathematisches Institut, Fakultät für Mathematik und Informatik, Friedrich-Schiller-Universität, Jena (Germany).
2. Membro del G.N.S.A.G.A. dell'I.N.d.A.M.

Borse di Studio e assegni di ricerca

1. Borsa di studio per perfezionamento all'estero, Università di Padova, Ottobre 1999 - Settembre 2000.
2. Borsa di studio nell'ambito del progetto "Metodi geometrico differenziali in fisica matematica", Istituto Italiano per gli Studi Filosofici, 1999-2000.
3. Borsa di dottorato, Engineering and Physical Sciences Research Council (E.P.S.R.C.), Ottobre 2000 - Settembre 2003.
4. Borsa di studio "Ennio De Giorgi", Università di Lecce, Settembre 2003 - Agosto 2004.
5. Assegno di ricerca presso l'Università di Lecce, Settembre 2004 - Agosto 2008.
6. Assegno di ricerca presso l'Università di Milano-Bicocca, Settembre 2008 - Giugno 2012.

Progetti di ricerca finanziati

1. "*Projectively equivalent metrics*", finanziato dal G.N.S.A.G.A. per la visita in Italia del prof. Vladimir Matveev (Università di Jena, Germania) Luglio/Settembre 2008;
2. "*On classification of 2-dimensional projectively equivalent metrics about singular points*", finanziato dal G.N.S.A.G.A. per la visita in Italia del prof. Vladimir Matveev (Università di Jena, Germania) Dicembre 2009;
3. "*Connection between Monge-Ampère equations in any number of independent variables and the geometry of subdistributions of a contact manifold*", finanziato dal ICMS (International Centre for Mathematical Sciences) di Edimburgo per il programma "Research-in-Groups, Settembre 2009 - 4 Ottobre 2009;
4. PRIN 2005-2007 "*Leggi di conservazione e termodinamica in meccanica dei continui e in teorie di campo*", coordinatore Marco Ferraris;

5. “Hamiltonian formalism for nonlinear differential equations and nonlocal aspects of integrability”, Consorzio E.I.N.S.T.E.I.N. e Russian Foundation for Basic Research, 2007 – 2008;
6. PRIN 2008-2010 “Metodi geometrici nella teoria delle onde non lineari ed applicazioni”, coordinatore Boris A. Dubrovin;
7. “Development and application of homological methods in the theory of integrable systems”, progetto nell’ambito del tema “The Theory of Nonlinear Integrable Systems and Applications”, Consorzio E.I.N.S.T.E.I.N. e Russian Foundation for Basic Research, 2009 – .

Soggiorni all’estero

1. King’s College London, Londra, Ottobre 1999 - Settembre 2003;
2. Mathematisches Institut - Albert Ludwigs Universität, Freiburg, Marzo 2005, per svolgere attività di ricerca con il prof. Vladimir Matveev;
3. Independent University, Mosca, Novembre 2005, per svolgere attività di ricerca con i prof. Alex Verbovetsky e Josef Krasil’shik;
4. Departement Wiskunde - Katolik University, Leuven, Maggio 2006, per svolgere attività di ricerca con il prof. Vladimir Matveev;
5. Departamento de Matemáticas - Universidad de Salamanca, Marzo/Aprile/Luglio 2007, Luglio 2009, per svolgere attività di ricerca con il prof. R. Alonso Blanco;
6. School of Mathematics - University of Edinburgh, Febbraio/Settembre 2009, per svolgere attività di ricerca con il prof. Dmitri Alekseevsky;
7. Mathematisches Institut - Fakultät für Mathematik und Informatik Friedrich-Schiller-Universität, Jena, Luglio/Settembre/Ottobre 2010, Marzo 2011, Luglio 2012 - , per svolgere attività di ricerca con il prof. V.S. Matveev.

Scuole frequentate

1. I Diffiety School, scuola sul calcolo differenziale algebrico, Forino (Av), Luglio 1998;
2. II Diffiety School, scuola sulla geometria degli spazi di getto finiti, Forino (Av), Luglio 1999;
3. IV Diffiety School, scuola sulla geometria delle PDEs, Forino (Av), Luglio 2000;
Certificati conseguiti durante la scuola:
 - Basic functors of differential calculus commutative algebras
 - R-manifolds and multivalued solutions of PDEs
 - Contact and symplectic multi-valued solutions of 1st order scalar differential equations
4. V Diffiety School, scuola sulla geometria degli spazi di getto infiniti, S. Stefano del Sole (Av), Luglio 2002,
Certificati conseguiti durante la scuola:
 - Infinite jets and Diffieties
5. VI Diffiety School, scuola sulla geometria delle PDEs, S. Stefano del Sole (Av), Luglio 2003;
6. III International Summer School on Geometry, Mechanics, and Control, L’Ametlla de Mar, Catalonia (Spagna), 22-27 June 2009.

Scuole e Convegni organizzati

1. III Diffiety School, scuola sulla geometria degli spazi di getto infiniti, Pereslavl-Zalessky, Yaroslavl, Russia, Agosto 1999;
2. IV Diffiety School, scuola sulla geometria delle PDEs, Forino (Av), 2000;
3. V Diffiety School, scuola sulla geometria delle PDEs, S. Stefano del Sole (Av), 2002;
4. VI Diffiety School, scuola sulla geometria delle PDEs, S. Stefano del Sole (Av), 2003;
5. Jet Nestruev Seminar, Santo Stefano del Sole, 2003;
6. VII Diffiety School, scuola sulla geometria delle PDEs, S. Stefano del Sole (Av), 2004;
7. VIII Diffiety School, scuola sulla geometria delle PDEs, S. Stefano del Sole (Av), Luglio 2005;
8. Convegno “Geometria in Bicocca”, 6-7 Maggio 2010;
9. Convegno “Geometria in Bicocca”, 12-13 Maggio 2011;
10. Convegno “Geometria in Bicocca”, 10-11 Maggio 2012.

Partecipazione a Conferenze Internazionali e seminari tenuti

1. Current Geometry, Napoli 2000.
2. Current Geometry, Napoli 2001.
3. 8th International Conference on Differential Geometry and Its Applications, Opava, Rep. Ceca., 2001.
Breve comunicazione dal titolo: Variational sequences on finite order jets of submanifolds.
4. 11th Oporto Meeting on Geometry, Topology and Physics, 2002.
5. Current Geometry, Napoli 2002.
6. Symmetries of Differential Equations, Lecce 2004.
Seminario su invito dal titolo: Geometria dell' equazione delle geodetiche.
7. International Workshop on Global Analysis, Ankara 2004.
Seminario dal titolo: The geometry of the geodesic equation in the framework of jets of submanifolds.
8. Symmetries and Pertubation Theory, Cala Gonone (Nu) 2004.
Seminario dal titolo: Contact-projective symmetries.
9. 9th International Conference on Differential Geometry and Its Applications, Praga, Rep. Ceca., 2004.
Breve comunicazione dal titolo: On the symmetry structure of the minimal surface equation.
10. Workshop on ‘Introduction to variational sequences’, Lecce, 6-9 Aprile 2005
Seminario su invito dal titolo: Geodesic equations on jets of submanifolds.
11. Symmetry in Geometry and Physics, Roma, settembre 2005.
12. Formal theory of PDEs and their applications, Joensuu (Finlandia), aprile 2006.
Seminario dal titolo: On the geometry of projectively equivalent connections.
13. Recent Advances in Differential Geometry, Lecce, Giugno 2007.
14. Symmetries and Pertubation Theory, Otranto (Italia), Giugno 2007.
Seminario su invito dal titolo: Solution of a S. Lie problem.
15. Geometry and Algebra of PDEs, Tromso (Norvegia), Agosto 2007.
Seminario dal titolo: Solution of a S. Lie problem.

16. Differential Geometry and its Applications, Olomouc (Rep. Ceca) Agosto 2007.
Plenary lecture su invito nella sessione di geometria riemanniana: Solution of a S. Lie problem.
17. U.M.I 2007, Bari Settembre 2007.
Seminario dal titolo: Solution of a S. Lie problem.
18. Geometry and Symmetries of Differential Equations, Santa Marinella, 17-22 Maggio 2010
Seminario su invito dal titolo: On the classification of metrics with projective symmetries.
19. Giornate di Geometria Algebrica e argomenti correlati X, Gargnano del Garda, 25-29 Maggio 2010.
Seminario su invito dal titolo: Geometria di contatto delle equazioni alle derivate parziali.
20. SPT 2011 - Symmetry and perturbation theory, Otranto 5-12 Giugno 2011.
21. Cartan Connections, Geometry of Homogeneous Spaces, and Dynamics, Vienna 10-23 Luglio 2011.
Seminario su invito dal titolo: Projectively homogeneous metrics on 2-dimensional manifolds.
22. Bi-Hamiltonian Systems and All That, Milano, 27 Settembre 2011 - 1 Ottobre 2011.
23. Workshop on Geometric and Analytic Aspects of Integrable Systems, Milano, 13-15 Giugno, 2012.
24. The interaction of Geometry and Representation Theory. Exploring new frontiers, Vienna, 3-14 Settembre.

Attività Didattica

1. A.A. 1999-2000, Marking work del corso “Basic Calculus”, Biology Dept., King’s College London;
2. A.A. 2000-2001
 - Marking work del corso “Basic Calculus”, Biology Dept., King’s College London;
 - Tutorial and Marking work di una parte del corso “Joint algebra”, Math. Dept., King’s College London;
3. A.A. 2001-2002, Tutorial and Marking work del corso “Advanced Calculus”, Eng. Dept., King’s College London;
4. A.A. 2005-2006, parte del corso di esercitazioni di “Algebra e Geometria”, Facoltà di Ingegneria dell’Università di Lecce;
5. A.A. 2006-2007, parte del corso di esercitazioni di “Algebra e Geometria”, Facoltà di Ingegneria dell’Università di Lecce;
6. Settembre 2006, minicorso dal titolo “Simmetrie delle PDEs” per il dottorato di ricerca in Matematica dell’Università di Messina;
7. A.A. 2008-2009
 - Titolare del corso di esercitazioni per il secondo modulo di “Istituzioni di Geometria Superiore”, Corso di Laurea in Matematica, Università degli studi di Milano-Bicocca;
 - Titolare del corso di esercitazioni per il corso di “Geometria Differenziale”, Corso di Laurea in Matematica, Università degli studi di Pavia;
8. A.A. 2009-2010
 - Titolare del corso di esercitazioni per il corso di “Algebra lineare e Geometria”, corsi di Laurea in Matematica e Fisica, Università degli studi di Milano-Bicocca.
 - Titolare del corso di “Richiami di Matematica”, Facoltà di Scienze dell’Università degli studi di Milano-Bicocca.
9. A.A. 2010-2011

- Titolare del corso di esercitazioni per il corso di “Algebra lineare e Geometria”, corsi di Laurea in Matematica e Fisica, Università degli studi di Milano-Bicocca.
- Titolare del corso di “Richiami di Matematica”, Facoltà di Scienze dell’Università degli studi di Milano-Bicocca.

10. A.A. 2011-2012

- Titolare del corso di esercitazioni per il corso di “Analisi II”, corsi di Laurea in Matematica e Fisica, Università degli studi di Milano-Bicocca.
- Titolare del corso di “Richiami di Matematica”, Facoltà di Scienze dell’Università degli studi di Milano-Bicocca.

Attività di referee: Ho svolto attività di referee per le seguenti riviste:

- Central European Journal of Mathematics;
- Report on Mathematical Physics;
- Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications;
- Transformation Groups;
- Acta Applicandae Mathematicae.

Breve descrizione degli interessi di ricerca e delle principali pubblicazioni

Metriche proiettivamente equivalenti. Due metriche si dicono *proiettivamente equivalenti* se ammettono le stesse curve geodetiche (non parametrizzate). Un campo vettoriale è detto *proiettivo* per una metrica se il suo flusso locale trasforma geodetiche (non parametrizzate) in geodetiche (non parametrizzate). Chiamamente, ogni isometria della metrica è un campo proiettivo. D’altra parte, le metriche a curvatura costante sono un esempio di metriche che ammettono campi proiettivi che non sono isometrie. Sophus Lie ha mostrato che l’insieme di tali campi forma un’ algebra e nel 1882 formulava il seguente problema:

Secondo problema di Sophus Lie:

Trovare tutte le metriche su superfici che ammettono un’ algebra di campi proiettivi di dimensione maggiore o uguale a 2.

A tale quesito abbiamo risposto in [5], dove abbiamo analizzato l’aspetto locale del problema. Il risultato principale consiste nell’aver determinato le forme normali di metriche proiettivamente omogenee, ossia quelle per cui l’azione dell’ algebra proiettiva è transitiva. La strategia usata è stata quella, in un primo momento, di classificare (a meno di trasformazioni di punto, cioè cambi di coordinate) le connessioni proiettive su superfici, ossia equazioni ordinarie del secondo ordine della forma

$$y'' = A(x, y) + B(x, y)y' + C(x, y)y'^2 + D(x, y)y'^3. \quad (1)$$

Quindi, in un secondo momento, di capire quali connessioni proiettive provenissero da una metrica. In [6] ho studiato la natura geometrica della connessione proiettiva (1) (una variabile indipendente) come caso particolare di connessione Grassmanniana (n -variabili indipendenti).

In [25] abbiamo classificato le metriche su superfici intorno a quei punti in cui l’azione dell’ algebra proiettiva è *singolare* (cioè non transitiva). Poiché i punti regolari formano un insieme aperto denso, in un intorno di quasi tutti i punti le metriche sono state descritte in [5]. Quindi, in [25], abbiamo ottenuto le metriche la cui azione dell’ algebra proiettiva è singolare incollando metriche della lista di [5]. Per capire quali metriche di tale lista possono essere incollate tra loro, in [25] sono stati considerati i seguenti invarianti metrici:

1. la curvatura scalare $R := \sum_{i,j,k} R_{ijk}^i g^{jk}$;
2. la lunghezza del differenziale della curvatura scalare $I := \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial R}{\partial x^i} \frac{\partial R}{\partial x^j}$;

3. il laplaciano della curvatura scalare $L := \Delta R := \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(g^{ij} \sqrt{\det(g)} \frac{\partial R}{\partial x^j} \right)$,

Questi invarianti sono stati calcolati lungo geodetiche che connettono un punto regolare a un punto singolare (esiste sempre una geodetica che connette un punto singolare ad un punto regolare in quanto l'insieme dei punti regolari è un aperto denso). Poiché queste funzioni sono C^∞ , tali invarianti non possono esplodere nei punti singolari.

Problemi di estendibilità. Un problema emerso durante lo studio del secondo problema di Lie è stato quello di estendere, a tutta la varietà, degli oggetti geometrici (per esempio campi proiettivi, campi di Killing, campi conformi, ecc.) definiti solo su di un aperto denso. Ovviamente quest'estensione non è sempre possibile: tale possibilità dipende dalle proprietà dell'insieme su cui tale oggetto non è definito. In [1] studiamo come estendere a tutto \mathbb{R}^2 un campo conforme definito su \mathbb{R}^2 privato di un punto. Mostriamo che tale estensione è sempre possibile, sotto alcune ipotesi di regolarità del campo, riducendo il problema ad un problema di estendibilità di funzioni olomorfe. In [30] stiamo studiando come estendere sezioni parallele di una connessione lineare. Tale problema è stato motivato dal fatto che i campi di Killing sono sezioni parallele di una particolare connessione (quella introdotta da Kostant).

Geometria di contatto ed equazioni di Monge-Ampère su varietà. In quest'ambito i miei interessi di ricerca riguardano la classificazione, locale, a meno di contattomorfismi, di distribuzioni su varietà di contatto. In [4] abbiamo trovato le forme normali di distribuzioni Lagrangiane di una varietà di contatto di dimensione 5 tramite la costruzione di opportuni invarianti aritmetici che hanno permesso di "misurare" quanto fosse "simmetrica" una distribuzione Lagrangiana. In [9], invece, abbiamo affrontato lo stesso problema dal punto di vista degli invarianti differenziali relativi. Poiché abbiamo mostrato [4, 9] che le distribuzioni Lagrangiane sono in corrispondenza biunivoca con le equazioni di Monge-Ampère paraboliche in quanto possono essere identificate con la loro distribuzione caratteristica, come naturale applicazione dei nostri risultati abbiamo ottenuto le forme normali di tali equazioni.

In [3] diamo un setting geometrico alla teoria delle caratteristiche delle PDEs usando varietà di contatto. La nostra attenzione è rivolta in particolare alle equazioni di Monge-Ampère (MAEs) multidimensionali, cioè con un numero arbitrario di variabili indipendenti. Mostriamo quindi che le MAEs del tipo

$$\det \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - b_{ij} \left(x^h, f, \frac{\partial f}{\partial x^h} \right) \right\| = 0 \quad i, j = 1 \dots n \quad (2)$$

hanno come distribuzione caratteristica una sottodistribuzione n -dimensionale della distribuzione di contatto (n è il numero di variabili indipendenti). Per equazioni del tipo precedente che ammettono un numero sufficiente di integrali intermedi sviluppiamo un metodo per risolvere un dato problema di Cauchy.

In [2], dopo aver studiato dal punto di vista delle varietà di contatto l'esistenza e l'unicità di soluzioni formali di un problema di Cauchy non caratteristico di PDEs del second'ordine, studiamo le MAEs associate alla parte reale e immaginaria di forme (para-)olomorfe. Mostriamo che tali MAEs sono di tipo *simplettico* e che le loro soluzioni sono sottovarietà Lagrangiane speciali.

In [27] stiamo tentando di dare una risposta a una congettura di Bryant-Griffiths secondo la quale ogni equazione di Monge-Ampère parabolica a coefficienti C^∞ è contattomorfa ad una della seguente forma

$$u_{yy} + 2au_{xy} + a^2u_{xx} = b$$

con a e b funzioni C^∞ di (x, y, u, u_x, u_y) . Tale congettura è stata provata dagli stessi R.L. Bryant e P. Griffiths nel caso analitico e in [4] per una ampia classe di funzioni C^∞ . Abbiamo dimostrato che tale congettura risulta essere vera se una certa equazione di Monge-Ampère associata ad una distribuzione Lagrangiana (e quindi del tipo (2)) ammette una soluzione C^∞ .

Simmetrie e rivestimenti di PDEs. Una simmetria (puntuale) di una PDE è una trasformazione delle variabili dipendenti e indipendenti che manda soluzioni in soluzioni. Per equazioni che provengono da una Lagrangiana, simmetrie di tale Lagrangiana (che risultano essere anche simmetrie dell'equazione ad essa associata) e leggi di conservazione sono collegate tramite il teorema di Noether. In [8] studiamo da un punto di vista geometrico il calcolo delle variazioni su varietà non fibrato introducendo una sequenza di forme differenziali su fibrati di Grassmann di ordine arbitrario. Tra i morfismi di tale sequenza ritroviamo l'operatore di Eulero-Lagrange e l'operatore di Helmholtz. Ricordiamo che un operatore differenziale che soddisfa le

condizioni di Helmholtz è localmente variazionale. In [7] troviamo nuovi risultati sulla corrispondenza tra simmetrie, leggi di conservazione e principi variazionali per equazioni di campo in teorie di gauge non abeliane. Il risultato principale ottenuto è che equazioni di campo del secondo ordine che posseggono simmetrie traslazionali e di gauge e le corrispondenti leggi di conservazione (tramite il teorema di Noether) sono sempre derivabili da un principio variazionale.

In [10, 11] caratterizziamo le equazioni differenziali che sono in corrispondenza biunivoca con la loro algebra di simmetrie (puntuali). Tra le equazioni differenziali che soddisfano tali proprietà troviamo le equazioni classiche di Monge-Ampère, la loro generalizzazione al caso di ordine superiore (introdotta da Boillat), l'equazione delle geodetiche su superfici.

Usando metodi di riduzione, in [26] studiamo le equazioni le cui soluzioni sono le *superfici di Willmore*, cioè quelle che minimizzano il funzionale $\int_S H^2 dS$, dove H è la curvatura media. In tale lavoro studiamo anche una classe più generale delle superfici di Willmore, le *superfici di Helfrich*, che sono state introdotte da Helfrich per modellizzare alcuni sistemi membranosi in biofisica. Di tali equazioni calcoliamo l'algebra di simmetrie (che proviamo essere l'algebra conforme di \mathbb{R}^2) e le soluzioni invarianti. Proviamo che una superficie di Helfrich (in particolare di Willmore) che sia invariante per una simmetria, sotto opportune ipotesi di regolarità, è un elicoide.

In [12] studiamo la relazione tra le algebre di simmetria di equazioni differenziali che si corrispondono tramite una trasformazione complessa. Dimostriamo che ogni simmetria dell'equazione di partenza viene trasformata in una simmetria (complessa) le cui parti reale e immaginaria sono simmetrie reali dell'equazione di arrivo. In particolare esaminiamo il caso di equazioni ellittiche in corrispondenza con equazioni iperboliche.

In [23] studiamo rivestimenti di PDEs con un numero arbitrario di variabili dipendenti. Tali rivestimenti sono strettamente collegati agli aspetti non locali delle PDEs (simmetrie e leggi di conservazione non locali, trasformazioni di Bäcklund) e sono descritti, localmente, da un'algebra di campi vettoriali. In particolare studiamo rivestimenti del tipo di Wahlquist-Estabrook di sistemi generalizzati di Landau-Lifshitz e dimostriamo che tali rivestimenti sono isomorfi ad algebre di funzioni a valori matriciali definite su curve algebriche il cui genere risulta fissato dal numero delle variabili dipendenti. Usando tali algebre, abbiamo costruito una nuova famiglia di trasformazioni di Bäcklund parametrizzata dai punti della suddetta curva. Questo studio è motivato dal fatto che, sebbene negli ultimi 30 anni sia stato compreso come costruire sistemi integrabili partendo da un'algebra infinito-dimensionale, il problema (inverso) di vedere se un sistema di PDEs sia collegato ad un'algebra infinito-dimensionale rimane tuttora aperto. Come già detto, tale questione è legata anche al problema cruciale per la teoria delle PDEs non-lineari di costruire e classificare trasformazioni di Bäcklund, che permettono di generare nuove soluzioni partendo da soluzioni conosciute. Recentemente S. Igonin ha introdotto il concetto di *algebre fondamentali*, che generalizza la costruzione di Wahlquist-Estabrook. Tali algebre formano una sequenza di omomorfismi suriettivi

$$\cdots \rightarrow \mathbb{F}_{k+1} \rightarrow \mathbb{F}_k \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{F}_1 \rightarrow \mathbb{F}_0, \quad (3)$$

dove \mathbb{F}_0 coincide con l'algebra introdotta da Wahlquist-Estabrook.

In [24] calcoliamo l'intera sequenza (3) per sistemi generalizzati di Landau-Lifshitz.

Progetti di ricerca

Soluzione del primo problema di S. Lie e congettura di Fomenko-Kozlov. Vorrei dare una risposta completa al primo problema di Sophus Lie

Primo problema di Sophus Lie:

Trovare tutte le metriche su superfici che ammettono un'algebra di campi proiettivi di dimensione 1.

Più precisamente vorrei occuparmi della versione locale di tale problema. Questo problema è stato risolto da V. Matveev in un intorno in cui il campo proiettivo non si annulla. Quindi, per dare una risposta completa al primo problema di Lie, occorre trovare le forme normali delle metriche 2-dim. nell'intorno di un punto in cui il campo proiettivo si annulla. Si spera che i metodi studiati in [25] possano essere applicati anche a questo caso. Se da un lato, per queste metriche, le funzioni R, I, L sono molto più complicate, dall'altro il loro *grado di mobilità* – cioè la dimensione dello spazio delle metriche geodeticamente equivalenti ad una metrica fissata – è uguale a 2. Ci si aspetta che le metriche con grado di mobilità uguale a 2 abbiano un sistema canonico di coordinate nell'intorno di ogni punto.

Un altro tema di ricerca, che ha attinenze con il problema di S. Lie, è quello di studiare flussi geodetici integrabili sul toro e sulla sfera. Sia (M^2, g) una varietà Riemanniana 2-dim. chiusa e connessa. Diremo che il flusso geodetico di g è *integrabile* se esiste una funzione $F : TM^2 \rightarrow \mathbb{R}$ che sia costante sulle orbite del flusso geodetico e che sia indipendente dalla funzione energia. Diremo che il flusso geodetico è *polinomialmente integrabile* se la funzione F dipende polinomialmente dalle velocità. Flussi geodetici su superfici chiuse che siano polinomialmente integrabili sono interessanti in quanto il problema della loro esistenza è un problema classico (Darboux 1896). Whittaker ha dimostrato nel 1927 che se un flusso geodetico ammette un integrale analitico-reale, allora è polinomialmente integrabile. Sottolineiamo che l'esistenza di un integrale polinomiale di grado basso ha un chiara interpretazione geometrica: per esempio l'esistenza di un integrale di grado 1 implica l'esistenza di un campo di Killing. In virtù dei risultati di Kolokoltsov del 1984, un flusso geodetico di una superficie di genere più grande di 2 non può essere polinomialmente integrabile. Quindi, una superficie orientabile che ammetta un tale flusso geodetico polinomialmente integrabile deve essere la sfera o il toro. Vorrei studiare più approfonditamente tali flussi geodetici. Un risultato preliminare sarebbe quello di provare la *congettura di Fomenko-Kozlov*:

Congettura di Fomenko-Kozlov:

Se il flusso geodetico di una metrica sul toro ammette un integrale di terzo grado (nelle velocità), allora ammette un integrale lineare.

Forme normali di sotto-distribuzioni di contatto. Un risultato classico di Darboux mostra che tutte le varietà di contatto sono localmente equivalenti. Questo spiega in parte perché gran parte dei moderni risultati in geometria di contatto sia di natura topologica. La geometria locale delle sotto-distribuzioni della distribuzione di contatto rimane un'area largamente inesplorata. In particolare, uno studio che merita di essere approfondito è quello della classificazione delle distribuzioni Lagrangiane: come già abbiamo visto [3, 4, 9], tali distribuzioni sono in relazione con le equazioni di Monge-Ampère. Un problema di sicuro interesse è quello di descrivere le forme normali delle distribuzioni Lagrangiane di varietà di contatto di dimensione superiore o uguale a 7. Tale problema risulta essere piuttosto complicato in quanto le distribuzioni integrabili di dimensione bassa (cioè 1 o 2) non sono in generale generate da campi Hamiltoniani.

Attualmente mi sto dedicando al problema di classificare le sotto-distribuzioni n -dim. della distribuzione di contatto di una varietà $(2n + 1)$ -dim che siano invarianti rispetto all'azione di un gruppo di Lie di contattomorfismi [29]. Tali distribuzioni sono in corrispondenza biunivoca con le equazioni di Monge-Ampère del tipo (2) invarianti rispetto ad un gruppo di simmetria.

Algebre di Lie fondamentali e trasformazioni di Bäcklund di PDEs. In quest'ambito di ricerca mi propongo di studiare le algebre fondamentali delle equazioni evoluzionarie scalari

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= F(x, t, u, u_1, \dots, u_p), \\ u &= u(x, t), \quad u_k = \frac{\partial^k u}{\partial x^k}, \quad \frac{\partial F}{\partial u_p} \neq 0, \quad p \geq 2. \end{aligned} \tag{4}$$

Questa classe di equazioni comprende PDEs molto note tra cui la KdV, la Krichever-Novikov, la Harry-Dym e la Kaup-Kupershmidt. Abbiamo che, per un'equazione integrabile (4) (nel senso della teoria solitonica) le algebre (3) soddisfano la proprietà

$$\exists k \text{ t.c. } \dim(\mathbb{F}_k/R_k) = \infty, \tag{5}$$

dove R_k è la somma di tutti gli ideali risolubili di \mathbb{F}_k .

La proprietà (5) risulta quindi essere un criterio necessario per l'integrabilità di (4). In tutti gli esempi conosciuti il criterio (5) è anche sufficiente. Notiamo che il criterio (5) risulta essere "più universale" di altri criteri di integrabilità molto noti, come per esempio quello dell'esistenza di infinite simmetrie locali generalizzate o leggi di conservazione. Infatti esistono equazioni di tipo (4) che ammettono solo un numero finito di simmetrie e leggi di conservazione e che sono integrabili in quanto collegate alla KdV tramite una trasformazione di Bäcklund. Per queste equazioni, invece, il criterio (5) è soddisfatto. Lo svantaggio del criterio (5) è che non è semplice da verificare in quanto richiede lo studio di una collezione infinita di algebre di Lie. Per questo motivo mi propongo di dimostrare la seguente congettura:

Congettura: *Per ogni equazione (4) esiste un intero $N \leq p$ tale che per ogni $k \geq N$ il kernel di $\mathbb{F}_{k+1} \rightarrow \mathbb{F}_k$ (vedi (3)) è risolubile. Se F di (4) è lineare in u_p , allora esiste un $N < p$ con la stessa proprietà.*

Usando il risultato di questa congettura, al fine di verificare il criterio d'integrabilità (5) per un'equazione (4), sarebbe sufficiente studiare solo le algebre \mathbb{F}_k con $0 \leq k \leq N$. Notiamo che, sebbene ci siano importanti risultati sull'integrabilità (nel senso dell'esistenza di infinite simmetrie o leggi di conservazione) delle equazioni (4), una completa classificazione delle equazioni (4) che siano integrabili ancora non esiste. Un problema interessante sarebbe quello di provare rigorosamente che qualche equazione (4) non è integrabile.

Publicazioni su rivista:

- [1] G. MANNO, G. METAFUNE: On the extendability of conformal vector fields of 2-dimensional manifolds, *Differential Geom. Appl.*, **30** (2012), 365-369.
- [2] D.V. ALEKSEEVSKY, R. ALONSO BLANCO, G. MANNO, F. PUGLIESE: Monge-Ampère equations on (para-)Kähler manifolds: from characteristic subspaces to special Lagrangian submanifolds, *Acta Appl. Math.*, **120**, no. 2 (2012), 3-27.
- [3] D.V. ALEKSEEVSKY, R. ALONSO BLANCO, G. MANNO, F. PUGLIESE: Contact geometry of multidimensional Monge-Ampère equations: characteristics, intermediate integrals and solutions, *Annales de l'Institut Fourier (Grenoble)*, **62**, no. 2 (2012), 497-524.
- [4] R. ALONSO BLANCO, G. MANNO, F. PUGLIESE: Normal forms for lagrangian distributions on 5-dimensional contact manifolds, *Differential Geom. Appl.*, **27** (2009), no. 2, 212-229.
- [5] R. L. BRYANT, G. MANNO, V. S. MATVEEV: A solution of a problem of Sophus Lie: normal forms of two-dimensional metrics admitting two projective vector fields, *Math. Ann.*, **340**, no. 2 (2008), 437-463.
- [6] G. MANNO: On the geometry of Grassmannian equivalent connections, *Adv. Geom.*, **8** (2008) 329-342.
- [7] G. MANNO, J. POHJANPELTO, R. VITOLO: Gauge invariance, charge conservation, and variational principles, *J. Geom. Phys.*, **58** no. 8 (2008) 996-1006.
- [8] G. MANNO, R. VITOLO: Geometric aspects of higher order variational principles on submanifolds, *Acta Appl. Math.*, **101** (2008) 215-229.
- [9] R. ALONSO BLANCO, G. MANNO, F. PUGLIESE: Contact relative differential invariants for non-generic parabolic Monge-Ampère equations, *Acta Appl. Math.*, **101** (2008) 5-19.
- [10] G. MANNO, F. OLIVERI, R. VITOLO: On differential equations characterized by their Lie point symmetries, *J. Math. Anal. and Appl.*, **332**, no. 2 (2007), 767-786.
- [11] G. MANNO, F. OLIVERI, R. VITOLO: Differential equations uniquely determined by algebras of point symmetries, *Theoret. and Math. Phys.*, **151**, no. 3 (2007), 843-850.
- [12] D. CATALANO FERRAIOLI, G. MANNO, F. PUGLIESE: Generalised symmetries of partial differential equations via complex transformations, *Bull. Austr. Math. Soc.*, **76** (2007), 243-262.
- [13] D. CATALANO FERRAIOLI, G. MANNO, F. PUGLIESE: Contact symmetries of the elliptic Euler-Darboux equation, *Note Mat.*, no. **23**, 2 (2004), 3-14.
- [14] G. MANNO, R. VITOLO: Relativistic mechanics, cosymplectic manifolds and symmetries, *Note Mat.*, no. **23**, 2 (2004), 157-171.

Proceedings:

- [15] G. MANNO, F. OLIVERI, R. VITOLO: Differential equations and Lie symmetries. *Wascom 2007-14th Conference on Waves and Stability in Continuous Media*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2008), 459-468.
- [16] G. MANNO, F. OLIVERI, R. VITOLO: On the correspondence between differential equations and symmetry algebras, *Symmetry and Perturbation Theory 2007*, Featured contribution, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, (2008), 164-171.

- [17] R. ALONSO BLANCO, G. MANNO, F. PUGLIESE: Contact geometry of parabolic Monge-Ampère equations, *Symmetry and Perturbation Theory 2007*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, (2008).
- [18] G. MANNO, F. OLIVERI, R. VITOLO: Lie remarkable PDEs, *Asymptotic methods in nonlinear wave phenomena*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, (2007), 119–131.
- [19] G. MANNO, F. OLIVERI, R. VITOLO: On an inverse problem in group analysis of PDEs: Lie-remarkable equations, *Wascom 2005–13th Conference on Waves and Stability in Continuous Media*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, (2006), 420–431.
- [20] A. KISSELEV, G. MANNO: On the symmetry structure of the minimal surface equation, *Proc. of the IX int. conf. on Diff. Geom. and its Appl.*, Praga (Czech Rep.), Matfyzpress (2005), 499–506.
- [21] G. MANNO: The geometry of the geodesic equation in the framework of jets of submanifolds, *Conference proceedings of AIP*, no. **729** (2004), 207–217.
- [22] G. MANNO, R. VITOLO: Variational sequences on finite order jets of submanifolds, *Proc. of the VIII int. conf. on Diff. Geom. and its Appl.*, Opava (Czech Rep.), Math. Publ., **3** (2001), 435–446.

Preprint:

- [23] S. IGONIN, J. VAN DE LEUR, G. MANNO, V. TRUSHKOV: Infinite-dimensional Prolongation Lie Algebras and Multicomponent Landau-Lifshitz Systems Associated with Higher Genus Curves, <http://arxiv.org/abs/1209.2999>, 31 pp.
- [24] S. IGONIN, G. MANNO: Fundamental Lie algebras for multicomponent Landau-Lifshitz systems, http://www.staff.science.uu.nl/~igoni101/preprints/fa_m11.pdf
- [25] G. MANNO, V.S. MATVEEV: Projectively homogeneous metrics near points where they are not projectively homogeneous, 33 pp.
- [26] G. DE MATTEIS, G. MANNO: Lie algebra symmetry analysis of the Helfrich and Willmore surface shape equations, 24 pp.

In preparazione:

- [27] G. MANNO, B. KRUGLIKOV: Normal forms for generic C^∞ -smooth Legendrian distributions on 5-dim. contact manifolds.
- [28] S. IGONIN, G. MANNO: Fundamental algebras for scalar evolution equations.
- [29] D.V. ALEKSEEVSKY, R. ALONSO BLANCO, G. MANNO, F. PUGLIESE: Homogeneous contact manifolds and invariant Monge-Ampère equations of Goursat type.
- [30] A.J. DI SCALA, G. MANNO: On the extension of parallel sections of linear connections.

Jena, 4 ottobre 2012

Giovanni Manno